ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Matematica. — *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

In una Nota precedente ([1]) ho indicate alcune delle proprietà fondamentali delle serie ordinate secondo le potenze intere negative del simbolo D, rappresentativo dell'operazione di derivazione, convenendosi di intendere con $D^{-n}\varphi(x)$ quella determinazione che è nulla dell'ordine $h+m$ per il punto $x=0$, se φ è nulla dell'ordine h in quel punto. Nel presente lavoro mi propongo di mostrare come quelle serie si prestino facilmente all'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee o, in altri termini, come esse siano atte a rappresentare l'operazione F^{-1} inversa di una forma differenziale lineare F ([2]).

È nota l'analogia, già ravvisata fin dal Lagrange e dal Libri, fra le equazioni differenziali lineari omogenee e le equazioni algebriche; è pure noto come benchè studiata e svolta da numerosi autori in varî sensi e per una così lunga serie di anni, essa conduca oggi ancora a risultati di grande interesse, come ne fanno fede recenti lavori dei signori Picard e Vessiot. È quindi naturale di pensare che questa analogia debba riposare su alcunchè di essenziale, ed è altrettanto naturale di cercare di estenderla, raffrontando le forme differenziali lineari coi polinomî razionali interi, poi, con un passo ulteriore, le inverse delle forme differenziali colle funzioni razionali fratte. Questo riavvicinamento, facilitato dall'impiego delle serie più sopra ricordate, non solo permette di porre in migliore luce risultati già noti, ma serve anche a dedurre nuove conseguenze, fra cui quella espressione analitica di F^{-1} che costituisce l'oggetto principale della presente Nota.

1. Abbiasi una forma differenziale lineare dell'ordine n

$$F(\varphi)=\pi_0\,D^n\varphi+\pi_1\,D^{n-1}\varphi+\cdots+\pi_{n-1}\,D\varphi+\pi_n\,\varphi \tag{1}$$

i cui coefficienti $\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_n$ siano funzioni analitiche regolari in un intorno comune di un determinato valore della variabile x, per esempio del valore $x=0$, essendo di più π_0 differente da zero in quel intorno. Per brevità, gl'integrali dell'equazione differenziale lineare omogenea $F=0$ si diranno *integrali della forma.*

Diremo *razionalmente risolubili* quei problemi riguardanti la forma F, la cui soluzione si ottiene colle sole operazioni razionali e di derivazione

([1]) *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, fasc. 7°, 1° sem., 1896.

([2]) Con *forma differenziale lineare* F, s'intende, secondo il solito, il primo membro di un'equazione differenziale lineare $F=0$; è chiaro che F è simbolo di una operazione funzionale distributiva.

eseguite sui coefficienti della forma stessa, senza che sia necessario di conoscerne gl' integrali.

Dalla forma F si possono dedurre, applicando la regola di derivazione al simbolo D (come se la F fosse un polinomio razionale intero in D) le nuove forme

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= n\pi_0 D^{n-1}\varphi + (n-1)\pi_1 D^{n-2}\varphi + \cdots + \pi_{n-1}\varphi, \\ F''(\varphi) &= n(n-1)\pi_0 D^{n-2}\varphi + (n-1)(n-2)\pi_1 D^{n-2}\varphi + \cdots 1.2\,\pi_{n-2}\varphi, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F^{(n)}(\varphi) &= n!\,\pi_0\varphi, \end{aligned}$$

che si diranno le *derivate funzionali* successive di F.

Con queste derivate funzionali si forma il noto sviluppo per $F(\varphi\psi)$:

$$F(\varphi\psi) = \varphi F(\psi) + D\varphi . F'(\psi) + \frac{1}{2!} D^2\varphi . F''(\psi) + \cdots + \frac{1}{n!} D^n\varphi . F^{(n)}(\psi). \tag{2}$$

2. Essendo ψ una funzione incognita, φ una funzione data, la

$$F(\psi) = \varphi$$

è un' equazione differenziale non omogenea, la cui integrazione equivale alla esecuzione dell' operazione funzionale F^{-1}, inversa di F, sulla funzione φ. Questa operazione F^{-1} è a determinazione multipla: dico però che se ne può dare una determinazione unica e determinata mediante una serie della forma

$$\sum \lambda_\nu D^{-\nu}\varphi, \tag{3}$$

in cui le λ_ν sono funzioni analitiche determinabili *univocamente* e *razionalmente*. Di più, per ogni elemento di funzione analitica φ regolare nell' intorno di $x = 0$, la serie precedente è convergente assolutamente ed in ugual grado in un intorno di quello stesso punto e rappresenta quindi un elemento di funzione analitica regolare nell' intorno di $x = 0$.

Per giungere a questo risultato, procederemo come segue: dovendo essere

$$FF^{-1} = 1, \tag{4}$$

applicheremo l' operazione F alle serie (3), ordineremo per le potenze decrescenti di D ed uguaglieremo a zero i coefficienti delle singole potenze di D (meno quello di D^0) in forza di quanto è stato dimostrato al § 8 della Nota precedente. Avremo così una successione di equazioni che varranno a determinare di mano in mano i coefficienti λ_ν; in quanto alla legittimità del procedimento, essa si dimostrerà *a posteriori* mostrando che i coefficienti λ_ν per esso ottenuti soddisfano alla condizione di convergenza (9) della precedente Nota.

3. Dalla (4) ricaviamo anzitutto che il più alto esponente del simbolo D

nello sviluppo (3) è $-n$, il che esprimeremo dicendo che quello sviluppo è dell'ordine $-n$. Posto dunque

$$F^{-1} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_\nu D^{-\nu},$$

applichiamo la F ad ambo i membri ed ordiniamo il secondo membro per le potenze decrescenti di D. Con un calcolo facile, scorgiamo che nei coefficienti si presentano in evidenza le derivate funzionali di F, essendo

$$FF^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_{\nu+2}) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_{\nu+n})\right)D^{-\nu},$$

dove sono da porre uguali a zero tutte le λ con indice inferiore ad n. Avremo dunque dalla (4), per il citato teorema:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \pi_0 \lambda_n = 1 \\ \frac{1}{n-1!}F^{(n-1)}(\lambda_n) + \pi_0 \lambda_{n+1} = 0 \\ \frac{1}{n-2!}F^{(n-2)}(\lambda_n) + \frac{1}{n-1!}F^{(n-1)}(\lambda_{n+1}) + \pi_0 \lambda_{n+2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \cdots \frac{1}{n-1!}F^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1}) + \pi_0 \lambda_{\nu+n} = 0 \end{array}\right.$$

che determinano univocamente le $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ come elementi di funzioni analitiche regolari nell'intorno di $x = 0$. Si ha in particolare:

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi_0}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{n\pi_0' - \pi_1}{\pi_0^2}, \text{ ecc.}$$

La forma stessa delle equazioni (5) dimostra inoltre che tutti questi coefficienti sono determinati *razionalmente* mediante i coefficienti $\pi_0, \ldots \pi_n$ della forma data.

4. Rimane ora da dimostrare la validità effettiva dello sviluppo trovato. A quest'uopo, indichiamo con $\overline{\lambda}_\nu$ la serie di potenze di x che si ottiene sostituendo nella λ_ν, ad ogni coefficiente, il rispettivo valore assoluto; indichiamo con Φ la forma che si ottiene da $\frac{1}{\pi_0}$F mutando pure, nello sviluppo in serie dei singoli coefficienti $\frac{\pi_1}{\pi_0}, \frac{\pi_2}{\pi_0}, \ldots \frac{\pi_n}{\pi_0}$ di essa F, ogni coefficiente nel rispettivo valore assoluto, e con $\Phi', \Phi'', \ldots$ le sue derivate funzionali; sia infine r il raggio dell'intorno di $x = 0$ in cui convergono le serie di potenze $\frac{\pi_1}{\pi_0}, \frac{\pi_2}{\pi_0}, \ldots \frac{\pi_n}{\pi_0}$ e $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots \lambda_{n+\nu-1}$ e si ponga

$$|x| = u, \quad u < r_1 < r.$$

La relazione ricorrente (5) ci darà:

$$\lambda_{n+\nu} = -\frac{1}{\pi_0}\left(F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \cdots + \frac{1}{n-1\,!}\,F^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1})\right) \tag{6}$$

da cui

$$\overline{\lambda}_{n+\nu}(u) \leq \Phi\left(\overline{\lambda}_\nu(u)\right) + \Phi'\left(\overline{\lambda}_{\nu+1}(u)\right) + \cdots - \frac{1}{n-1\,!}\,\Phi^{(n-1)}(\overline{\lambda}_{\nu+n-1})\,.$$

Sia ora g il massimo valore delle $\overline{\lambda}_n(u), \overline{\lambda}_{n+1}(u), \ldots \overline{\lambda}_{\nu+n-1}$ per $u \leq r_2 < r_1$; si ponga per brevità

$$\omega(u) = \frac{r_1}{r_1 - u}$$

e si avrà per una nota proposizione della teoria delle serie di potenze:

$$\overline{\lambda}_{n+s}(u) \leq g\,\omega(u)\,, \qquad (s = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots \nu - 1)$$

e quindi

$$\overline{\lambda}_{n+\nu}(u) < g\left(\Phi(\omega) + \Phi'(\omega) + \cdots + \frac{1}{n-1\,!}\,\Phi^{(n-1)}(\omega) + \frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}(\omega)\right).$$

Ma l' espressione entro parentesi, per la formula (2), non è altro che

$$e^{-u}\,\Phi(e^u\,\omega)\,,$$

espressione che per tutti i valori di $u < r_2$ ammette un limite superiore finito h, che si può senza inconvenienti supporre in ogni caso maggiore dell' unità. Questo numero h dipende naturalmente dalla forma Φ, ossia dalla F, ma non dalla funzione arbitraria φ cui essa forma è applicata. Ne viene

$$\overline{\lambda}_{n+\nu}(u) < hg\,,$$

ma si ha

$$|\lambda_{n+\nu}(x)| \leq \overline{\lambda}_{n+\nu}(u)\,,$$

onde

$$|\lambda_{n+\nu}(x)| < hg$$

e quindi

$$|\lambda_{n+\nu+1}| < h^2 g\,,\ |\lambda_{n+\nu+2}| < h^3 g\,, \ldots, |\lambda_{n+\nu+i}| < h^{i+1} g\,.$$

Ora queste condizioni rientrano evidentemente come caso particolare nelle condizioni (9) di convergenza incondizionata date nella Nota precedente: per cui risulta dimostrata la validità effettiva dello sviluppo (3) dato per F^{-1}. Questo sviluppo si può ordinare per le potenze crescenti di x ed incomincia colla potenza x^n: esso ci dà quindi quell' integrale dell' equazione $F(\psi) = \varphi$ che è nullo insieme alle sue $n-1$ prime derivate per $x = 0$, e che gli autori tedeschi chiamano *integrale principale* (Hauptintegral).

Riassumendo, possiamo quindi concludere che:

L'integrale principale dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$F(\psi) \equiv \pi_0\,D^n\psi + \pi_1\,D^{n-1}\,\psi + \cdots + \pi_{n-1}\,D\psi + \pi_n\,\psi = \varphi$$

in cui $\pi_0, \pi_1, \dots \pi_n$ sono elementi di funzioni analitiche regolari in un intorno di $x=0$ e π_0 non si annulla in questo intorno, è espresso dalla serie

$$\psi = \frac{1}{\pi_0} D^{-n}\varphi + \frac{n\pi_0' - \pi_1}{\pi_0^2} D^{-n-1}\varphi + \cdots + \lambda_\nu D^{-\nu}\varphi + \cdots$$

i cui coefficienti sono determinati dalla equazione ricorrente

$$\lambda_{\nu+n} = -\frac{1}{\pi_0}\left(F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \cdots + \frac{1}{\overline{n-1}\,!} F^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1})\right)$$

insieme alle condizioni

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots \lambda_{n-1} = 0\,,\; \lambda_n = \frac{1}{\pi_0}.$$

Per ogni elemento di funzione φ regolare in un intorno di $x=0$, questa serie è convergente assolutamente ed in ugual grado in un intorno conveniente di $x=0$ e fornisce quindi per ψ un elemento di funzione analitica. I coefficienti della serie trovata sono razionalmente esprimibili per i coefficienti della forma data.

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ un sistema fondamentale di integrali della forma F e $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ il corrispondente sistema di moltiplicatori. È nota la formula di risoluzione dell'equazione non omogenea

$$F(\psi) = \varphi$$

ottenuta da Lagrange col metodo della variazione delle costanti arbitrarie; questa formula è:

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \int^x \mu_h\, \varphi\, dx$$

e ci dà l'integrale principale quando in tutte ed n le quadrature si prende il limite inferiore uguale a zero. Con ciò le quadrature si riducono alla nostra operazione D^{-1} e la formula di Lagrange viene a scriversi

$$F^{-1}\varphi = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h\, D^{-1}(\mu_h\, \varphi).$$

La F^{-1} si può ora sviluppare per le potenze negative di D mediante la formula (7) della Nota precedente e indicando con $\mu^{(r)}$ la $D^r\mu$, avremo

$$F^{-1}\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{n} (-1)^{\nu-1}\, \alpha_h\, \mu_h^{(\nu-1)} D^{-\nu}\varphi.$$

Ma questo sviluppo non può, per il teorema del § 8 della citata Nota, differire da quello trovato al § precedente: onde concludiamo che le λ_ν definite dal sistema (5) sono esprimibili in funzione degl' integrali e dei moltiplicatori della F, mediante la formula

$$\lambda_\nu = (-1)^{\nu-1} \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h\, \mu_h^{(\nu-1)}. \tag{7}$$

In particolare le condizioni $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ e $\lambda_n = \frac{1}{\pi_0}$ ci dànno le equazioni

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_h \, \mu_h^{(i)} \, , \; (i = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \ldots n - 2) \, ,$$

$$\sum_{h=0}^{n} \alpha_h \, \mu_h^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_0} \, ,$$

che sono, come è noto, quelle che servono a determinare i moltiplicatori.

Meteorologia. — *Riassunto delle Osservazioni meteorologiche fatte all' Osservatorio Etneo.* Nota del Corrispondente A. Riccò (¹).

L' Osservatorio Etneo è posto al piede del cratere centrale di Mongibello, a circa 1 km. dall' orlo S-SE: dista dall'Osservatorio di Catania 27 km. nella direzione N. 15° W; gli strumenti meteorologici sono all' altezza 2947^m sul mare.

Si accede all' Osservatorio Etneo da Catania con tre ore di via carrozzabile fino a Nicolosi, tre ore di via mulattiera fino alla *Casa del Bosco*, poi per sentieri più o meno visibili dopo un' altra ora si arriva alla *Cantoniera meteorico alpina*, e dopo altre 3 ore all' Osservatorio; nella buona stagione si giunge coi muli fino davanti alla porta dell' Osservatorio. Nell' inverno da Casa del Bosco in su vi è neve, per lo più molle, di spessore crescente fino ad alcuni metri attorno all' Osservatorio Etneo, sulla quale i muli non possono camminare: perciò il viaggio riesce assai faticoso, e col cattivo tempo, pressocchè impossibile. Per il soggiorno continuo lassù, anche nell' inverno, non abbiamo nè personale, nè mezzi sufficenti; tanto più che manca finora una linea telegrafica o telefonica di comunicazione coll' abitato.

Il termobarografo Richard che potrebbe funzionare da solo per 40 giorni, d' inverno agisce male e spesso si ferma, anche usando lubrificanti incongelabili.

Per tutto questo le nostre osservazioni meteorologiche, specialmente nella stagione fredda, sono scarse e discontinue. Però siccome lassù i fenomeni meteorologici hanno molte regolarità e variazioni ristrette, si potrà da quel che si è fatto finora, ottenere valori delle medie meteorologiche delle stagioni abbastanza vicini al vero: naturalmente quelle dell' inverno hanno un peso minore. Nulla di meno crediamo opportuno pubblicare i risultati

(¹) Queste osservazioni saranno pubblicate più completamente negli Annali dell' Ufficio Centrale di meteorologia e Geodinamica. Tutti i calcoli e le riduzioni per questo lavoro sono stati fatti dall' assistente prof. G. Saija.