ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Matematica. — *Funzioni olomorfe nel campo ellittico* (estensione di un celebre teorema di Weierstrass). Nota di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

Dato un piano complesso (Riemanniana di genere zero), si possono costruire su esso funzioni *trascendenti* le quali abbiano un solo punto di *singolarità essenziale*, infiniti punti-zero, e nessun altro punto d' infinito.

Tali funzioni si sogliono chiamare *olomorfe*, e il punto di singolarità essenziale può porsi in un luogo qualunque della Riemanniana. Un celebre teorema di Weierstrass insegna a costruire una siffatta funzione mediante un prodotto infinito, quando sono stabiliti i punti-zero della funzione stessa.

Supponiamo ora data una Riemanniana di genere uno (ellittica); proponiamoci per essa il medesimo problema, cioè costruire funzioni trascendenti che non abbiano punti d' infinito salvo i due punti all' infinito dei due piani che costituiscono la Riemanniana, nei quali la funzione abbia singolarità essenziali, e che abbia infiniti punti-zero sulla Riemanniana stessa.

Considerando p. e. la Riemanniana ellittica corrispondente alla relazione solita

$$p'^2(u) = 4\,p^3(u) - g_2\,p(u) - g_3$$

si ha una funzione di u definita nel primo parallelogrammo fondamentale dei periodi 2ω, $2\omega'$, e che in questo possiede infiniti punti-zero, e nessun punto d'infinito, oltre il punto $u = 0$ che è un punto di singolarità essenziale. Disporremo la rete di parallelogrammi nel piano u, in modo che il punto $u = 0$ sia il centro del parallelogrammo fondamentale.

È notevole che per queste funzioni, le quali stanno alle funzioni ellittiche, come le funzioni olomorfe ordinarie stanno alle funzioni razionali, si può dimostrare una formola che è assai simile a quella citata di Weierstrass. Quando i semiperiodi ω, ω' diventano infiniti, le funzioni ellittiche degenerano in funzioni razionali, e il parallelogrammo fondamentale viene ad estendersi per tutto il piano delle u, tali funzioni diventano le funzioni olomorfe ordinarie (quando si trasporti il punto di singolarità essenziale nel punto $u = 0$).

Scopo di questa Nota è di mostrare la costruzione della formola indicata, e infine di applicarla alla costruzione di una funzione da reputarsi, da questo punto di vista, come estensione della funzione olomorfa σ di Weierstrass. Si potrà poi anche definire un numero simile a quello chiamato da Laguerre il *genere* di certe funzioni olomorfe.

Funzioni di tale specie sarebbero p. e. delle serie convergenti i cui termini sono dei due tipi

$$a_n\,p^n \ , \ b_n\,p'\,p^n$$

($n =$ numero intero positivo), e che poi per le note proprietà della funzione p, si possono trasformare in serie i cui termini procedono secondo le derivate successive della funzione p.

§ 1. *Estensione della formola di Weierstrass.*

Sia $F(u)$ la supposta funzione olomorfa nel campo ellittico, e indichiamo con $\zeta(u)$ il noto integrale di 2ª specie ellittico

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

e sieno $u_1\ u_2 \ldots$ i punti zero di F nel parallelogrammo fondamentale; tali punti li indichiamo con un indice solo, ma potrebbero anche dipendere da *più* indici. Essi formino un gruppo di punti il cui punto limite è il punto $u = 0$. Consideriamo la serie

$$\sum_n \left[\zeta(u - u_n) - \zeta(u)\right] \frac{p^k(u)}{p^k(u_n)}$$

Dico che si può sempre scegliere un tal valore intero positivo di k, in modo che questa serie sia equiconvergente nel parallelogrammo fondamentale, da cui con un' area, piccola a piacere, sia stato escluso il punto $u = 0$.

In effetti se k non può prendersi fisso al variare di n, potrà sempre prendersi $k = n$ (se le u_n dipendono da più indici, sieno p. e. del tipo u_{mn}, allora si prende k eguale al prodotto degli indici), e per un tale k certamente la serie è convergente in egual grado. Giacchè escludendo dal parallelogrammo fondamentale con aree piccole a piacere il punto $u = 0$, e i punti u_n, nell'area restante i moduli delle funzioni $p(u)$ e $\zeta(u - u_n) - \zeta(u)$ avranno valori sempre finiti che ammetteranno dei *limiti superiori* finiti, e anzi col variare di n il modulo della seconda di queste quantità può rendersi piccolo a piacere. Se sono rispettivamente A, B tali *limiti superiori* i moduli dei termini della serie

$$\sum B \frac{A^n}{p^n(u_n)} = \sum s_n$$

sono rispettivamente maggiori di quelli della serie data; ora questa serie è convergente assolutamente perchè il

$$\sqrt[n]{s_n} = \sqrt[n]{B}\, \frac{A}{p(u_n)}$$

tende a zero per $n = \infty$, giacchè $p(u_n)$ tende ad ∞, e B tende anch' esso a zero per $n = \infty$.

Se le u_n dipendessero da due indici p. e. m, n la serie proposta sarebbe allora una serie doppia, e si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento prendendo in considerazione, anzichè il radicale n^{mo}, il radicale $(mn)^{mo}$, potendosi dimostrare facilmente che un simile criterio opportunamente modidificato vale anche per le serie doppie, o multiple.

La serie proposta essendo dunque equiconvergente sarà integrabile termine a termine.

Ora dico che ogni termine di quella serie può porsi sotto la seguente forma:

$$\left[\zeta(u-u_n)-\zeta(u)\right]\frac{p^k(u)}{p^k(u_n)}=\left[\zeta(u-u_n)-\zeta(u)\right]+\mathrm{P}_k(u)$$

essendo $\mathrm{P}_k(u)$ *una funzione razionale intera di grado* k *in* $p(u)$ *e* $p'(u)$.

In effetti partiamo dalla cosiddetta formola di addizione per la funzione ζ ponendola sotto la seguente forma

$$\zeta(u-u_n)-\zeta(u)=\frac{1}{2}\frac{p'(u)+p'(u_n)}{p(u)-p(u_n)}-\zeta(u_n)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}p'(u)-\zeta(u_n)\,p(u)+\left[\frac{1}{2}p'(u_n)+\zeta(u_n)\,p(u_n)\right]}{p(u)-p(u_n)}$$

Sostituendo questo valore nella espressione precedente si vede che $\mathrm{P}_k(u)$ diventa:

$$\mathrm{P}_k(u)=\frac{1}{p^k(u_n)}\left[\frac{1}{2}p'(u)-\zeta(u_n)\,p(u)+\left[\frac{1}{2}p'(u_n)+\zeta(u_n)\,p(u_n)\right]\right]\times$$
$$\times\left[p^{k-1}(u)+p^{k-2}(u)\,p(u_n)+\cdots+p^{k-1}(u_n)\right]$$

Formiamo ora la differenza

$$\frac{\mathrm{F}'(u)}{\mathrm{F}(u)}-\sum\left[\zeta(u-u_n)-\zeta(u)+\mathrm{P}_k(u)\right]$$

Si ha una funzione sempre finita nel parallelogrammo fondamentale (escluso il punto $u=0$) compresivi anche i punti u_n nei quali primo e secondo termine di questa differenza diventano infiniti di primo ordine. Abbiamo dunque una funzione della specie di F; chiamandola $\mathrm{G}(u)$, e integrando si ha (essendo c una costante)

$$\mathrm{F}(u)=\mathrm{C}\,e^{\int \mathrm{G}(u)du}\,\underset{n}{\Pi}\left\{\frac{\sigma(u-u_n)}{\sigma(u)}\,e^{\int \mathrm{P}_k(u)du}\right\}$$

Le funzioni

$$\int \mathrm{G}(u)\,du \qquad \int \mathrm{P}_k(u)\,du$$

sono a loro volta funzioni olomorfe nel campo ellittico; la seconda anzi è di grado finito; ammette cioè in $u=0$ un polo, e non propriamente un punto di singolarità essenziale.

§ 2. *Costruzione della funzione da ritenersi come generalizzazione della σ di Weierstrass.*

Quando i punti-zero della funzione sono tali che k può prendersi *costante*, allora il numero $2k$ lo chiameremo *genere* della funzione olomorfa nel campo ellittico.

Passiamo alla costruzione di una funzione di genere 2, da ritenersi come estensione della σ di Weierstrass.

Prendiamo i punti zero della funzione nei punti

$$u_{mn} = \frac{1}{2\,m\omega + 2\,n\omega'}$$

essendo m, n interi positivi o negativi, meno la combinazione $m = 0$ $n = 0$. Tali punti hanno per punto limite il punto zero, quindi, almeno da certi valori di m, n in poi, stanno tutti compresi nel parallelogrammo fondamentale.

Dico che con tali punti si può scegliere nelle formole precedenti $k = 1$, e quindi si viene a costruire *una funzione di genere* 2.

In effetti un termine della serie

$$\sum \Big[\zeta(u - u_{mn}) - \zeta(u) \Big] \frac{p(u)}{p(u_{mn})} \,,$$

(per effetto della formola precedente, e degli sviluppi noti

$$p\,(u_{mn}) = \frac{1}{u^2_{mn}} + A_2$$

$$p'(u_{mn}) = -\frac{2}{u^3_{mn}} + B_1$$

$$\zeta\,(u_{mn}) = \frac{1}{u_{mn}} + C_3$$

dove A_2 B_1 C_3 sono delle serie tendenti a zero per u_{mn} tendente a zero, e propriamente contengono come fattore u_{mn} ai gradi 2, 1, 3 rispettivamente) può porsi sotto la forma

$$p(u) \frac{-p(u) + R}{-1 + S}\, u^3_{mn}$$

dove R, S sono delle quantità tendenti a zero per u_{mn} tendente a zero. Il denominatore diventa zero solo nei punti $u = u_{mn}$, quindi in una area che escluda il punto $u = 0$ e i punti u_{mn}, la precedente espressione sarà sempre *finita* e ammetterà un *limite superiore* A.

Paragonando allora questi termini con quelli della serie

$$A \sum \frac{1}{|u^3_{mn}|}$$

che, come si sa, è assolutamente convergente, se ne ricava la equiconvergenza della serie in esame.

Il valore di $P_k(u)$ risulta

$$P_1(u) = \frac{1}{p(u_{mn})} \left\{ -\zeta(u_{mn})\, p(u) + \frac{1}{2} p'(u) + \left(\frac{1}{2} p'(u_{mn}) + \zeta(u_{mn})\, p(u_{mn}) \right) \right\}$$

onde

$$\int P_1(u)\, dn = \frac{\zeta(u_{mn})}{p(u_{mn})} \zeta(u) + \frac{1}{2} \frac{1}{p(u_{mn})} p(u) + \frac{\frac{1}{2} p'(u_{mn}) + \zeta(u_{mn})\, p(u_{mn})}{p(u_{mn})} u$$

Prendendo $G(u) = 0$ costruiamo allora la funzione

$$\sum(u) = \mathop{\Pi}_{mn} \frac{\sigma(u - u_{mn})}{\sigma(u)} e^{\int P_1(u) du}$$

Se i semiperiodi $\omega\ \omega'$ diventano ∞, questo sviluppo diventa valido in tutto il piano delle u, le funzioni ellittiche diventano

$$p(u) = \frac{1}{u^2} \quad p'(u) = -\frac{2}{u^3} \quad \zeta(u) = \frac{1}{u} \quad \sigma(u) = u$$

e si ha

$$\mathop{\Pi}_{mn} \left(1 - \frac{u_{mn}}{u} \right) e^{\frac{u_{mn}}{u} + \frac{1}{2} \frac{u^2_{mn}}{u^2}}$$

osservando che allora

$$\frac{1}{2} p'(u_{mn}) + \zeta(u_{mn})\, p(u_{mn}) = 0$$

e quindi l' esponenziale risulta solo di due termini.

Questo sviluppo infinito è appunto quello noto della σ ellittica quando vi si faccia il cangiamento di variabile u in $\frac{1}{u}$.

Fisica. — *Azione dei raggi Röntgen e della luce ultravioletta sulla scarica esplosiva nell' aria* [1]. Nota dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

1. Nei Rendiconti della seduta del 1° marzo 1896 di questa Accademia noi rendemmo di pubblica ragione un' esperienza relativa all' azione dei raggi Röntgen sopra una scintilla esplosiva in derivazione sulla corrente di scarica di un rocchetto, la quale illuminava il Crookes. Il fatto da noi osservato era che la distanza esplosiva era molto minore in presenza dei raggi Röntgen, che non quando questi venivano intercettati. L'esperienza riesce con tutta sicurezza nelle condizioni da noi descritte e la differenza fra le due distanze esplosive è così marcata — potendo variare circa del doppio da un caso

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.