ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

prendono origine da questo tronco sono piuttosto abbondanti. Il tronco finisce in un cuore caudale, mentre dall' altro cuore caudale dipartesi la vena caudale. I due cuori comunicano l' uno coll' altro per mezzo di un foro. Le ramificazioni suddette non hanno comunicazioni dirette coll' apparato circolatorio sanguigno, nel tronco del Leptocefalo. Al capo le osservazioni riescono malagevoli. Il lume dell' apparato linfatico è rivestito dovunque da endotelio.

Così resta definitivamente dimostrata l' esistenza di un apparato linfatico nei pesci, la quale dopo tante discussioni, ai nostri giorni veniva generalmente messa in dubbio.

III. La muscolatura dei Murenoidi inizialmente è lamellare nel foglietto mediale del somite. Ricorda così quella dello sturione.

Conclusioni biologiche.

I. I Leptocefali dello *Sphagebranchus* si distinguono da quelli dell' *Ophichthys hispanus* Bellotti (Sin. *H. remicaudus*) perchè la pinna dorsale non sorpassa l' estremità posteriore.

Tra di loro i Leptocefali dei due *Sphagebranchus* si distinguono per la diversa punteggiatura.

Precisamente la punteggiatura sottolaterale è quasi uniforme nello *S. imberbis*, mentre nello *S. coecus* forma delle macchie simili a quelle del *Leptocephalus* dell' *O. serpens* e dell' *O. hispanus*.

II. La *Chlopsis bicolor* è imparentata da una parte col *Muraenichthys*, dall' altra colla *Muraena*.

III. Il *Nettastoma brevirostre* Facciolà, per la disposizione delle narici posteriori, devesi scindere dai *Nettastoma*, e perciò vien da noi elevato a nuovo genere (*Todarus*).

Matematica. — *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze* (1). Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. In molte delle ricerche in cui il calcolo alle differenze trova applicazione, insieme ad una forma lineare:

$$(1)\quad A(f) = a_0(x)\,f(x) + a_1(x)\,\theta f(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,\theta^{n-1} f(x) + \theta^n f(x),$$

occorre considerarne un' altra che dal Pincherle, il quale per primo ebbe ad occuparsene (2), fu chiamata la sua *inversa*. Tale è la forma:

$$A_{-1}(f) = a_0(x+n)\,f(x+n) + a_1(x+n-1)\,f(x+n-1) + \cdots + f(x)$$

(1) Questa Nota fa seguito ad un' altra pubblicata nel fascicolo 7, 1° sem. 1896, di questi Rendiconti col titolo: *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze.*

(2) Cfr. p. es. Memorie Acc. di Bologna, serie IV, tomo X, pag. 526.

o, più semplicemente:

$$A_{-1}(f) = a_0(x)\, f(x) + a_1\,(x-1)\, f(x-1) + \cdots + f(x-n)\,,$$

cioè:

$$(2)\quad A_{-1}(f) = a_0(x)\, f(x) + \theta^{-1}(a_1(x)\, f(x)) + \cdots + \theta^{-(n-1)}(a_{n-1}(x)\, f(x)) + \theta^{-n} f(x)\,.$$

È manifesta l'analogia fra il modo con cui dalla data forma si ottiene questa sua inversa, ed il modo con cui da una data equazione differenziale lineare se ne ottiene l'aggiunta di Lagrange; qui c'è solo da considerare che, nel formare la inversa, bisogna invertire anche il senso della operazione θ. Tenuto conto di questo si vede che: *la inversa della inversa è la forma data.* Ed infatti questa può scriversi:

$$A(f) = a_0(x)\, f(x) + \theta(a_1(x-1)\, f(x)) + \cdots + \theta^{n-1}(a_{n-1}(x-n+1)\, f(x)) + \theta^n f(x).$$

Avendo verificato che tutte le proprietà che una data equazione differenziale ha rispetto alla sua aggiunta di Lagrange, trovano riscontro in proprietà al tutto simili di una forma alle differenze rispetto alla sua inversa, non mi è parsa necessaria questa nuova denominazione ed ho creduto di poter chiamare le due forme $A(f)$, $A_{-1}(f)$, *aggiunte l'una dell'altra.* Mi è poi grato il dichiarare che debbo allo stesso prof. Pincherle l'idea di ricercare per le forme inverse le proprietà analoghe alle aggiunte di Lagrange.

2. Dalla definizione discende:

a) *La aggiunta della aggiunta di una forma lineare alle differenze è la stessa forma data.*

b) *La aggiunta della somma o della differenza di due forme date è eguale alla somma od alla differenza delle aggiunte.*

Dimostriamo inoltre che:

c) *La aggiunta del prodotto* $AB(f)$ *di due forme date è eguale al prodotto, fatto in ordine inverso,* $B_{-1}A_{-1}(f)$, *delle aggiunte* [1].

Sia infatti $A(f) = \sum a_r(x)\, \theta^r f$, $B(f) = \sum b_r\, \theta^r f$. Avremo: $AB(f) = \sum (a_0\, b_r + a_1\, \theta b_{r-1} + \cdots + a_r\, \theta^r\, b_0)\, \theta^r f$; la inversa di questo prodotto è:

$$\begin{aligned}(AB)_{-1}(f) &= \sum \theta^{-r}\left[(a_0\, b_r + a_1\, \theta b_{r-1} + \cdots + a_r\, \theta^r b_0)\, f\right]\\ &= \sum (\theta^{-r} a_0 \,.\, \theta^{-r} b_r + \theta^{-r} a_1 \,.\, \theta^{-r+1} b_{r-1} + \cdots + \theta^{-r} a_r \,.\, b_0)\,.\, \theta^{-r} f\\ &= \sum (b_0\, \theta^{-r} a_r + \theta^{-1} b_1 \,.\, \theta^{-r} a_{r-1} + \cdots + \theta^{-r} b_r \,.\, \theta^{-r} a_0)\, \theta^{-r} f,\end{aligned}$$

cioè appunto il prodotto delle due forme $\sum \theta^{-r} b_r \,.\, \theta^{-r} f$. $\sum \theta^{-r} a_r \,.\, \theta^{-r} f$ aggiunte delle date.

Ne segue che:

d) *La aggiunta del prodotto di più forme*

$$AB \ldots\ldots HK(f)$$

[1] Prodotto $AB(f)$ di due forme A, B, è quella nuova forma che si ottiene ponendo in A, in luogo della funzione arbitraria f, il risultato della operazione $B(f)$ (Pincherle, *L'algebra delle forme alle differenze.* Mem. Acc. Bologna, serie V, tomo V, pag. 91).

è il prodotto

$$\mathrm{K}_{-1}\,\mathrm{H}_{-1}\ldots\,\mathrm{B}_{-1}\,\mathrm{A}_{-1}(f),$$

fatto in ordine inverso, delle aggiunte.

Come applicazione di questo teorema si consideri una forma $\mathrm{B}(f) = \mathrm{A}\,\mathrm{A}_{-1}(f)$, che sia prodotto di due forme aggiunte l'una dell'altra; avremo:

$$\mathrm{B}_{-1}(f) = (\mathrm{A}_{-1})_{-1}\,\mathrm{A}_{-1}(f) = \mathrm{A}\,\mathrm{A}_{-1}(f).$$

e) Cioè: *Se si hanno due forme lineari alle differenze aggiunte l'una dell'altra, il loro prodotto è una forma identica alla sua aggiunta.*

3. Giovandomi ora dei risultamenti a cui sono giunto in un lavoro pubblicato negli Annali di Matematica dello scorso anno, col titolo: *Contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*, posso formare una funzione di due variabili indipendenti che, relativamente a ciascuna di queste, considerata come fondamentale, sia integrale della forma data e della sua aggiunta rispettivamente.

Tale è la funzione:

$$\mathrm{F}(z, x) = (-1)^{x-z}\,. \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1}(z+1), & 1, & 0,\ldots 0, & 0, & 0 \\ a_{n-2}(z+2), & a_{n-1}(z+2), & 1,\ldots 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0,\ldots a_{n-2}(x-n+1), & a_{n-1}(x-n+1), & 1 \\ 0, & 0, & 0,\ldots a_{n-3}(x-n), & a_{n-2}(x-n) & a_{n-1}(x-n) \end{vmatrix}$$

come del resto può verificarsi sviluppando quel determinante secondo gli elementi della ultima linea, o secondo quelli della prima colonna.

Fu ancora provato che il sistema

$$\mathrm{F}(z, x),\ \mathrm{F}(z+1, x),\ldots \mathrm{F}(z+n-1, x) \tag{4}$$

è fondamentale per la forma $\mathrm{A}(f)$ e che il sistema:

$$\mathrm{F}(z, x),\ \mathrm{F}(z, x+1),\ldots \mathrm{F}(z, x+n-1) \tag{5}$$

è fondamentale per la sua aggiunta. Siccome poi si può avere un accrescimento nell'ordine di quel determinante in due modi diversi, e cioè: per la aggiunta successiva di una ultima linea e colonna, o per la successiva aggiunta di una prima linea e colonna, ciò che corrisponde nel primo caso ad una variazione di x in θx, nel secondo di z in $\theta^{-1} z$, così potremo dire che quel determinante compendia le due forme aggiunte l'una dell'altra, e si vede anche bene ora perchè, nella formazione della aggiunta occorra invertire il senso della operazione θ.

4. Fra le ∞^n varietà di integrali della forma $\mathrm{A}(f)$, sono specialmente notevoli quelli che si possono ricavare dal sistema (4) con la sostituzione:

$$\left\{\begin{matrix} a_0(z), & 0, & 0,\ldots & 0 & 0 \\ a_1(z), & a_0(z+1), & 0,\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}(z), & a_{n-2}(z+1), & a_{n-3}(z+2),\ldots, & a_1(z+n-2), & a_0(z+n-1) \end{matrix}\right. \tag{6}$$

e che nella citata Memoria [1] indicai coi simboli

$$A_0(z, x) \;,\; A_1(z, x) \,, \dots A_{n-1}(z, x)\,.$$

Ricordando che nella forma $A(f)$ qui considerata è supposto eguale ad 1 il coefficiente di $\theta^n f$, avremo [2]:

$$(7)\; \nabla(A_0, A_1 \dots A_{n-1}) = \begin{vmatrix} A_0\,, & A_1 \dots & A_{n-1} \\ \theta A_0 & \theta A_1 \dots & \theta A_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-1} A_0 & \theta^{n-1} A_1\,, \dots, & \theta^{n-1} A_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n(x-z-1)} \prod_{s=z}^{x} a_0(s)\,,$$

e pei reciproci dell' ultima linea (indicando sempre con x la variabile principale) si avranno le espressioni [3]:

$$(8)\qquad \nabla(A_0, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots A_{n-1}) =$$

$$\beta_{n-1}(x, z+k) = (-1)^{x-z} \begin{vmatrix} a_1(x)\,, & a_0(x)\,, & 0\,, \dots & 0 & 0 \\ a_2(x-1)\,, & a_1(x-1)\,, & a_0(x-1), \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\,, & 0\,, & 0\,, & a_2(z+k) & a_1(z+k) \end{vmatrix}$$

Se ora si considerano le funzioni:

$$(9)\qquad B_{n-1}(x, z+k) = (-1)^{n+k} \frac{\nabla(A_0, \dots A_{k-1}, A_{k+1}, \dots A_{n-1})}{\nabla(A_0, \dots A_{n-1})}\,,$$

si vede, sviluppando secondo la prima colonna il determinante al numeratore, che *sono integrali della forma aggiunta.*

D' altra parte le formule (9) ci dicono *che il sistema* $B_{n-1}(x, z)$, $B_{n-1}(x, z+1), \dots, B_{n-1}(x, z+n-1)$, *è aggiunto al sistema* $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$, nel senso che a questa denominazione fu dato nella ricordata Nota: *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze*; potremo dunque subito concludere:

a) *Il determinante*

$$(10)\qquad \nabla_{-1}(B_{n-1}(x, z), \dots B_{n-1}(x, z+n-1)) =$$

$$\begin{vmatrix} B_{n-1}(x, z)\,, & B_{n-1}(x, z+1)\,, \dots & , B_{n-1}(x, z+n-1) \\ \theta^{-1} B_{n-1}(x, z)\,, & \theta^{-1} B_{n-1}(x, z+1)\,, \dots & , \theta^{-1} B_{n-1}(x, z+n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{-(n-1)} B_{n-1}(x, z) & \theta^{-(n-1)} B_{n-1}(x, z+1), \dots, & \theta^{-(n-1)} B_{n-1}(x, z+n-1) \end{vmatrix}$$

ha il valore: $(-1)^{n(x-z)} \cdot \prod_{s=z}^{x} \dfrac{1}{a_0(s)}$.

[1] § III, n. 13, formula (10). Si noti che nella ultima linea del determinante (11) ivi considerato, fu, per errore di trascrizione, scritto: $0, 0, 0, \dots a_2(z+m-3)$, $a_1(z+m-2)$, $a_0(z+m-1)$, anzichè: $a_{m-1}(z)$, $a_{m-2}(z+1)$, $a_{m-3}(z+2), \dots a_2(z+m-3)$, $a_1(z+m-2)$ $a_0(z+m-1)$.

[2] Loc. cit. formula (13).

[3] Loc. cit. n. 17.

b) *Il sistema* $B_{n-1}(x, z), \dots, B_{n-1}(x, z+n-1)$, *è fondamentale per la aggiunta.*

c) *Le funzioni* $A_0, \dots A_{n-1}$, *sono proporzionali ai reciproci dell'ultima linea nel determinante delle* $B_{n-1}(x, z), \dots B_{n-1}(x, z+n-1)$.

5. Sia ora $y_1, y_2 \dots y_n$ un sistema fondamentale qualunque di integrali della forma $A(f)$; siccome il determinante della sostituzione che trasforma il sistema $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ nel sistema $y_1, y_2 \dots y_n$ non può essere identicamente nullo, così è facile dedurne che *il sistema*

$$z_k = \frac{(-1)^{n+k} \nabla(y_1, \dots y_{k-1}, y_k, \dots y_n)}{\nabla(y_1, \dots, y_n)},$$

aggiunto al dato, è fondamentale per la forma aggiunta e che reciprocamente: Se $z_1, z_2 \dots z_n$ *è un sistema fondamentale di integrali della forma aggiunta, i reciproci dell'ultima linea nel determinante* $\nabla_{-1}(z_1, z_2, \dots z_n)$ *divisi pel determinante stesso formano sistema fondamentale di integrali della forma data.*

Potremo in generale (loc. cit. n. 3) dedurne che: *Considerati i sistemi di* n^2 *elementi*

$$\begin{array}{lll} y_1, y_2, \dots, y_n & \qquad & \theta^{-(n-1)}z_1, \theta^{-(n-1)}z_2, \dots, \theta^{-(n-1)}z_n \\ \theta y_1, \theta y_2, \dots, \theta y_n & & \theta^{-(n-2)}z_1, \theta^{-(n-2)}z_2, \dots, \theta^{-(n-2)}z_n \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \theta^{n-1}y_1, \theta^{n-1}y_2, \dots, \theta^{n-1}y_n & & z_1, \quad z_2, \dots \quad, z_n \end{array}$$

i minori formati colle prime p linee nel primo sistema sono proporzionali ai complementari dei minori corrispondenti nel secondo.

E concluderemo, nello stesso modo che nel caso delle differenze infinitesime (¹), che: *Un sistema fondamentale di integrali della data forma, ed il suo sistema aggiunto sono contragredienti.*

6. Si chiami *moltiplicatore* di una forma alle differenze $A(y)$, qualunque funzione $z(x)$ che soddisfi identicamente la relazione: $z(x)\,A(y) = \Delta A(y, z(x))$.

Dalle relazioni: $z_k\,A(y) = \Delta\psi(y, z_k)$, trovate al n. 1 (formola (8)) della Nota ricordata, potremo concludere: *I moltiplicatori di una forma lineare alle differenze sono integrali della forma aggiunta.*

Se con x_0 indichiamo il punto del campo di variabilità della x che si assume come iniziale potremo scrivere quelle relazioni sotto la forma:

$$\sum_{x_0}^{x-1} z_k(x)\,A(y) = \psi(y, z_k) \tag{11}$$

(¹) Cfr. p. es. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. 1°, pag. 66.

che permette di sommare un numero qualunque di termini della serie $\sum_x z_k \, \mathrm{A}(y)$.

7. Nella Nota citata, ho anche dimostrato la formula

$$(12) \qquad y\,\mathrm{A}_{-1}(z) - z\,\mathrm{A}(y) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta\, \psi(y_1\, \theta^{-1} z)$$

sotto la condizione che il determinante $V(y_1, y_2, \ldots y_n)$ sia invariante per la operazione θ; cioè che nella forma che ammette il sistema $y_1, y_2, \ldots y_n$ siano eguali i coefficienti del primo e dell' ultimo termine. Nella forma $\mathrm{A}(y) = \dfrac{V(y, y_1, \ldots y_n)}{\theta V(y_1 \ldots y_n)}$ il coefficiente del primo termine è eguale all' unità; dovremo dunque supporre che nella forma $\mathrm{A}(f)$ sieno ridotti ad essere eguali alla unità i coefficienti sia del primo che dell' ultimo termine (ciò che è sempre possibile), ed allora potremo concludere;

Se $\mathrm{A}(f)$ ed $\mathrm{A}_{-1}(f)$ sono due forme alle differenze aggiunte l' una dell' altra, ed y e z rappresentano due arbitrarie funzioni della x, il binomio

$$y\,\mathrm{A}_{-1}(z) - z\,\mathrm{A}(y)$$

è una differenza esatta di una funzione bilineare omogenea delle $y, \theta y \ldots \theta^{n-1} y$ e delle $\theta^{-1} z, \theta^{-2} z \ldots \theta^{-n} z$.

Questa proprietà è *caratteristica* delle forme alle differenze aggiunte l' una dell' altra.

Sia infatti

$$y\,\mathrm{B}(z) - z\,\mathrm{A}(y) = \Delta\, \Phi(y, z)$$

si avrà, sottraendo dalla (12):

$$y(\mathrm{A}_{-1}(z) - \mathrm{B}(z)) = \Delta(\psi - \Phi).$$

Cioè: la differenza prima di una funzione lineare delle $y, \theta y \ldots \theta^{n-1} y$, sarebbe una funzione della sola y, ciò che non può essere. Sarà dunque $\mathrm{B}(z) = \mathrm{A}_{-1}(z)$.

8. Per la funzione $\psi(y, z)$ si è trovata la espressione:

$$\psi(y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} [V(y, y_1, \ldots y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots y_n)\, V_{-1}(z, z_1, \ldots z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots z_n)].$$

Alle relazioni identiche:

$$(13) \qquad \left\{ \sum_{r=1}^{n} \theta^{\alpha} y_r\, \theta^{\beta} z_r \right\} \begin{matrix} = 0 & \quad \text{se } 0 \leqq \alpha - \beta < n-1 \\ = 1 & \quad \text{se } \alpha - \beta = n-1 \end{matrix} \quad ,$$

che derivano dalle proprietà fondamentali trovate al n. 5 di questa Nota, potremo dunque aggiungere le seguenti:

$$(14) \qquad \begin{cases} \psi(y_r\, z_r) = 1 \\ \psi(y_r\, z_s) = 0 \end{cases}$$

9. È noto che, quando si conosca un sistema fondamentale di integrali di una data forma alle differenze, questa può scomporsi in un prodotto di forme del primo ordine [1]. La formula (6) trovata nella Nota: *Sui determinanti di funzioni* . . ., offre un mezzo semplice per fare quella decomposizione. Facendo in essa $k=n$ si trova:

$$\frac{V(y\,,y_1\,,\dots y_n)}{\theta\Delta(y_1\,,\dots y_n)}=-\frac{V(y_1\dots y_n)}{V(y_1\dots y_{n-1})}\,\Delta\,\frac{V(y\,,y_1\dots y_{n-1})}{V(y_1\dots y_n)} \tag{15}$$

Ricordiamo ora che $V(y\,,y_1\dots y_n)$ è la forma che ammette il sistema $y_1\,,y_2\dots y_n$, e che indicheremo con $\mathrm{A}(y)$, poniamo poi $V(y_1\,,y_2\dots y_k)=V_k$; $V_{n+1}=V_0=1$; avremo per successiva applicazione della (15):

$$\mathrm{A}(y)=\frac{V_n\theta V_n}{V_{n+1}\,V_{n-1}}\,\Delta\,\frac{V_{n-1}\,\theta V_{n-1}}{V_n\,V_{n-2}}\,\Delta\dots\frac{V_1\theta V_1}{V_2\,V_0}\,\Delta\,\frac{1}{V_1}\cdot y\,. \tag{16}$$

Si può dunque scrivere:

$$\tag{17}\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}(y)=\mathrm{E}^{(1)}\,\mathrm{E}^{(2)}\,\dots\,\mathrm{E}^{m}(y).\\ &\quad\text{con}\\ &\quad\mathrm{E}^{(k)}(f)=\frac{V_{n-k+1}\theta V_{n-k+1}}{V_{n-k+2}\,V_{n-k}}\,\Delta f\,,\quad (k=1\,,2\dots n-1)\\ &\quad\mathrm{E}^{(n)}(f)=\frac{V_1\theta V_1}{V_2\,V_0}\,\Delta\,\frac{f}{V_1}\end{aligned}\right.$$

Che è appunto la formula di scomposizione cercata. In questa formula non è fatta nessuna ipotesi pei coefficienti della $\mathrm{A}(y)$.

Formandone la aggiunta con la regola trovata al n. 2 di questa Nota, avremo

$$\mathrm{A}_{-1}(y)=\overset{(n)}{\mathrm{E}}_{-1}\,\overset{(n-1)}{\mathrm{E}}_{-1}\,\dots\,\overset{(2)}{\mathrm{E}}_{-1}\,\overset{(1)}{\mathrm{E}}_{-1}\,.$$

cioè:

$$\mathrm{A}_{-1}(y)=\frac{1}{V_1}\,\Delta^{-1}\,\frac{V_1\theta V_1}{V_2V_0}\,\Delta^{-1}\dots\frac{V_{n-1}\theta V_{n-1}}{V_nV_{n-2}}\,\Delta^{-1}\,\frac{V_n\theta V_n}{V_{n+1}V_{n-1}}\,y\,. \tag{18}$$

Si può dunque concludere: *Nella decomposizione in fattori di due forme aggiunte l'una dell'altra, i coefficienti sono gli stessi, è solo invertito l'ordine dei fattori ed il senso della operazione* θ.

Questa condizione poi, per il ricordato teorema sulla aggiunta del prodotto, è anche sufficiente perchè due forme scomposte in fattori del primo ordine sieno aggiunte l'una dell'altra.

10. Suppongasi ora data una forma lineare alle differenze

$$\mathrm{A}(y)=\Delta\,\frac{1}{\alpha_n}\,\Delta\,\frac{1}{\alpha_{n-1}}\,\Delta\dots\frac{1}{\alpha_2}\,\Delta\,\frac{1}{\alpha_2}\,y \tag{19}$$

[1] Pincherle, *L'algebra delle forme alle differenze*, n. 11 e 12.

scomposta nei suoi fattori del primo ordine. Potremo, in modo interamente analogo a quello usato per le equazioni differenziali lineari [1] formare un sistema fondamentale di integrali di quella forma ed il sistema corrispondente della aggiunta Basterà perciò applicare la regola data dal Pincherle nella sua *Algebra delle forme alle differenze* (n. 11) e si giungerà al sistema:

$$(20)\quad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 \\ u_2 = \alpha_1 \sum\limits_{x_0}^{x-1} \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_n = \alpha_1 \sum\limits_{x_0}^{x-1} \alpha_2 \sum\limits_{x_0}^{x-2} \alpha_3 \sum\limits_{x_0}^{x-3} \dots \sum\limits_{x_0}^{x-n+1} \alpha_n \,. \end{cases}$$

Dove u_i è integrale delle ultime $n - i + 1$ fra le forme:

$$(21)\qquad F_1 = \Delta \frac{1}{\alpha_1} y\,,\quad F_2 = \Delta \frac{1}{\alpha_2} F_1\,, \dots,\quad F_n = A = \Delta \frac{1}{\alpha_n} F_{n-1}\,,$$

senza esserlo delle rimanenti.

Similmente per la forma aggiunta:

$$(22)\qquad A_{-1}(y) = \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_1} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_2} \Delta^{-1} \dots \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_n} \,.\, y\,,$$

formeremo il sistema fondamentale:

$$(23)\quad \begin{cases} v_n = \alpha_n \\ v_{n-1} = - \alpha_n \sum\limits_{x_0}^{x} \alpha_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_1 = (-1)^{n-1} \alpha_n \sum\limits_{x_0}^{x} \alpha_{n-1} \sum\limits_{x_0}^{x} - \sum\limits_{x_0}^{x} \alpha_1 \end{cases}$$

e v_i sarà integrale delle prime i fra le forme alle differenze

$$(24)\ G_1 = \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_1} y\,;\quad G_2 = G_1\, \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_2} y, \dots,\quad G_n = A_{-1} = G_{n-1} \,.\, \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_n} y.$$

senza esserlo delle rimanenti.

Osserverò in ultimo, ciò che risulta immediatamente dal teorema sul prodotto delle forme aggiunte, che le forme G_i e F_i sono aggiunte l'una dell'altra.

[1] Cfr. p. es. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. T. II, pag. 106 seg.