ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Matematica. — *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens.* Nota del dott. ORAZIO TEDONE, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

1. In questa Nota vogliamo applicare un procedimento di integrazione di cui, in parecchi casi [1], si è servito il prof. Volterra, a ritrovare la notissima formola di Kirchhoff relativa alla equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

e che rappresenta analiticamente ed in modo preciso il principio di Huygens.

La dimostrazione a cui accenniamo, molto notevole per la sua semplicità e perchè conduce in pari tempo a stabilire una formola più generale di quella di Kirchhoff, si ottiene facilmente trasportando le considerazioni del prof. Volterra in uno spazio a quattro dimensioni.

2. Consideriamo perciò l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mathrm{X}, \tag{2}$$

dove X rappresenta una funzione nota di x, y, z, t, e che comprende l'equazione (1) come caso particolare. Interpretiamo x, y, z, t, come le coordinate di un punto variabile in uno spazio lineare a quattro dimensioni e chiamiamo S_4' quella parte di esso che è limitata dalla varietà conica C a tre dimensioni

$$a(t_2-t)=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}=r, \tag{3}$$

dalla varietà cilindrica c

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=\varepsilon^2, \tag{4}$$

ε essendo un numero piccolo ad arbitrio, e da una varietà Σ, pure a tre dimensioni, la quale soddisfi alla condizione di essere incontrata in un solo punto da ogni parallela all'asse t, e del resto completamente arbitraria. Supporremo inoltre che in S'_4 si abbia sempre $t_1>t$ ed indicheremo con Σ_1, Σ_2, Σ' le parti di C, c e Σ che, rispettivamente, lo limitano.

[1] Vedi *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.* — *Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* R. Acc. dei Lincei, v. I, ser. 5ª; e specialmente: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes,* Acta math. T. XVIII.

Se con n indichiamo la direzione della normale al contorno di S'_4, diretta verso il suo interno e con u, u_1 due funzioni che in S'_4 sono regolari e soddisfano alle equazioni (2) e (1) si avrà:

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad 0 &= \int_{S'_4} \Big\{ u_1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - X \right] - \\
&\quad - u \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \right] \Big\} \, dS'_4 = \\
&= - \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma'} \Big\{ u_1 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \right] - \\
&\quad - u \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - a^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \right] \Big\} \, d\Sigma - \int_{S'_4} u_1 X \, dS'_4
\end{aligned}
$$

3. Se si cercano le soluzioni φ della equazione (1) che dipendono soltanto dal rapporto $\dfrac{t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, si trova

$$
\varphi = \alpha \frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \beta
$$

α e β essendo due costanti arbitrarie. Si potrà dunque porre:

$$
(6)\qquad u_1 = a \frac{t_1 - t}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}} - 1 = a \frac{t_1 - t}{r} - 1 .
$$

Su Σ_1 si ha allora:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - a^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial n} - a^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \\
&= - \frac{a^2}{\sqrt{1 + a^2}} \left(-1 + a_1 \frac{t_1 - t}{r} \right)
\end{aligned}
$$

giacchè

$$
\frac{\partial t}{\partial n} = \cos(nt) = - \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial n} = \cos(r\, n) = - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} .
$$

Ne viene quindi che l'integrale esteso a Σ_1, che comparisce in (5), è identicamente nullo.

Su Σ_2 abbiamo invece:

$$
\frac{\partial t}{\partial n} = 0 ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial r} = - a \frac{t_1 - t}{r^2} ;
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} ,
$$

per cui l' integrale esteso a Σ_2, che comparisce in (5), si potrà scrivere

$$-a^2\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{\omega}\left[a\frac{t_1-t}{\varepsilon^2}u+\left(a\frac{t_1-t}{\varepsilon}-1\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right]\varepsilon^2 d\omega,$$

dove t_0 indica il valore di t che corrisponde alla intersezione di Σ con l'asse t ed ω è la superficie di una sfera a tre dimensioni di raggio uno, od una parte di essa.

Facendo ora impiccolire ε indefinitamente e chiamando S_4 e Σ ciò che allora diventano S'_4 e Σ', la (5) ci darà:

$$-\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt+\int_{S_4}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)X dS_4+$$
$$+\int_{\Sigma}\left\{\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-u\left[\frac{-a}{r}\frac{\partial t}{\partial n}+a^3\frac{t_1-t}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]\right\}d\Sigma=0\,.$$

In questa formola ω sarà eguale a 4π se l'asse t incontra Σ in un punto senza esserle tangente, sarà eguale a zero se non l'incontra, e rappresenterà in generale una parte della superficie sferica di raggio uno, se l'asse t è tangente a Σ.

Se ora si osserva che su Σ_1 e sull'intersezione di Σ_1 con Σ è

$$a\frac{t_1-t}{r}-1=0\,,$$

derivando la formola precedente successivamente due volte rispetto a t_1, e dividendo per a, si trova:

$$\omega\, a^2 u(x_1,y_1,z_1,t_1)=\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_4}\frac{X}{r}\,dS_4+ \tag{7}$$
$$+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]d\Sigma-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma}u\left[\frac{-1}{r}\frac{\partial t}{\partial n}+a^2\frac{t_1-t}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]d\Sigma,$$

e questa formola è più generale di quella di Kirchhoff.

4. Per ritrovare la formola di Kirchhoff ordinaria, supporremo che Σ si componga di una parte S_3 di uno spazio lineare a tre dimensioni determinato dalla equazione $t=t_0$, limitato da una superficie σ, e dalla varietà cilindrica γ a tre dimensioni, che si ottiene conducendo da ogni punto di σ una parallela all'asse t. Su S_3 è

$$t=t_0=\text{cost.}\quad \frac{\partial t}{\partial n}=1,\quad \frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial r}{\partial n}=0\,,$$

mentre su γ è

$$\frac{\partial t}{\partial n}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n}\,,$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\Sigma \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]d\boldsymbol{\Sigma}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\int_{S_3}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,dS_3-a^2\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}}dt\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\right\}=-\,a^2\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}\,u\left(x,y,z,t_1-\frac{r}{a}\right)d\sigma.$$

Similmente

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1{}^2}\int_\Sigma u\left[\frac{-1}{r}\frac{\partial t}{\partial n}+a^2\frac{t_1-t}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]d\boldsymbol{\Sigma}=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1{}^2}\left\{-\int_{S_3}\frac{u}{r}\,dS_3+a^2\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}}(t_1-t)\,dt\int_\sigma \frac{u}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma\right\}=$$

$$=a^2\int_\sigma \frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma+a\,\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma=$$

$$=-\,a^2\int_\sigma \frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma$$

ponendo $\dfrac{\delta}{\delta n}=\dfrac{\partial}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial n}$.

Così pure si ha

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_4}\frac{X}{r}\,dS_4=\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_3}\frac{dS_3}{r}\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}}X\,dt=\int_{S_3}\frac{X\left(x\,,y\,,z\,,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,dS_3\,.$$

Tenendo conto di questi risultati la (7) si potrà scrivere:

$$(8)\quad \omega u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t_1)=\int_\sigma\left\{\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}u\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)\right\}d\sigma+$$

$$+\frac{1}{a^2}\int_{S_3}\frac{X\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,dS_3\,.$$

In questa formola ω sarà eguale a 4π se l'asse t incontra S_3 in un punto interno, sarà zero se non l' incontra, rappresenterà una parte della superficie sferica di raggio uno se l'incontra in un punto del contorno σ.