ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Meccanica. — *Sulla integrazione delle equazioni della elasticità*. Nota di O. TEDONE, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

1. Nella mia Nota, presentata lo scorso maggio a codesta Accademia, col titolo *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens*, ho dedotto la notissima formola di Kirchhoff che rappresenta nel modo più completo e più rigoroso il principio di Huyghens, servendomi di un metodo di integrazione di cui l'idea fondamentale è dovuta al prof. Volterra.

Mi propongo ora di mostrare che gli stessi concetti possono applicarsi con vantaggio anche alle equazioni della elasticità.

2. Ricordiamo perciò che le equazioni del movimento vibratorio di un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, di cui soltanto ci occupiamo, possono scriversi:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} - 2a^2\left(\dfrac{\partial \chi}{\partial z} - \dfrac{\partial \varrho}{\partial y}\right) - X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} - 2a^2\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi}{\partial z}\right) - Y = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial z} - 2a^2\left(\dfrac{\partial \varpi}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi}{\partial x}\right) - Z = 0 \end{cases}$$

dove:

$$(2)\qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \varpi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \;,\quad \chi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \;,\quad \varrho = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Ora se indichiamo con S_4 una porzione di uno spazio lineare a quattro dimensioni in cui x, y, z, t rappresentano le coordinate di un punto variabile, limitata da una varietà Σ a tre dimensioni, soggetta alla condizione di avere in ogni punto un iperpiano tangente determinato e variabile con continuità da punto a punto, almeno generalmente; se indichiamo con u', v', w' un sistema di tre funzioni regolari in S_4, come u, v, w, e distinguiamo con un accento le quantità che dipendono da u', v', w' e se, finalmente, indichiamo con n la direzione della normale a Σ diretta verso l'interno di S_4, col solito metodo di integrazione per parti, troveremmo la formola seguente:

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
&\int_{S_4}(Xu'+Yv'+Zw')dS_4+\int_\Sigma\left\{\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]u'\right.\\
&\qquad+\left[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\frac{dz}{dn}\varpi\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]v'\\
&\qquad\left.+\left[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]w'\right\}d\Sigma\\
&-\int_{S_4}(X'u+Y'v+Z'w)dS_4-\int_\Sigma\left\{\left[-b^2\theta'\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi'\frac{dz}{dn}-\varrho'\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]u\right.\\
&\qquad+\left[-b^2\theta'\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho'\frac{dx}{dn}-\varpi'\frac{dz}{dn}\right)+\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]v\\
&\qquad\left.+\left[-b^2\theta'\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi'\frac{dy}{dn}-\chi'\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]w\right\}d\Sigma=0.
\end{aligned}\right.
$$

3. Prenderemo dapprima per S_4 lo spazio $S'_{4,b}$ limitato dalla varietà conica C

$$
(4)\qquad \frac{b(t_1-t)}{r}-1=0\quad,\quad r=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2},
$$

dove x_1, y_1, z_1, t_1 rappresentano le coordinate di un punto arbitrario dello spazio lineare (x, y, z, t), dalla varietà cilindrica c

$$
(5)\qquad r=\varepsilon
$$

e dalla porzione Σ'_b di una varietà Σ a tre dimensioni, soggetta ancora alla condizione di essere incontrata in un solo punto da ogni parallela all'asse t. Supporremo inoltre che in $S'_{4,b}$ sia sempre $t_1 > t$ e chiameremo Σ''_b, Σ'''_b le porzioni di C e c che insieme a Σ'_b limitano completamente $S'_{4,b}$. Facciamo poi:

$$
(6)\quad u'=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\right], v'=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\right], w'=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\right]
$$

ed osserviamo che si ha corrispondentemente:

$$
(7)\qquad \theta'=\frac{2}{r}\ ;\ \varpi'=\chi'=\varrho'=0\ ;\ X'=Y'=Z'=0.
$$

La (3) ci darà quindi:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{S'_{4,b}}(Xu'+Yv'+Zw')\,dS'_{4,b}+\iint_{\Sigma'_b+\Sigma''_b+\Sigma'''_b}\left\{\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]u'\right.\\
&\qquad\qquad+\left[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]v'\\
&\qquad\qquad\left.+\left[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]w'\right\}d\boldsymbol{\Sigma}_b\\
&-\iint_{\Sigma'_b+\Sigma''_b+\Sigma'''_b}\left\{\left[-\frac{2b^2}{r}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]u+\left[-\frac{2b^2}{r}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]v+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left[-\frac{2b^2}{r}\frac{dz}{dn}+\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]w\right\}d\boldsymbol{\Sigma}_b=0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Poichè ora è:

$$u'=\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{dx}{dr}\,,\ v'=\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{dy}{dr}\,,w'=\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{dz}{dr},$$

mentre su $\boldsymbol{\Sigma}''_b$ è $\dfrac{d}{dn}=\dfrac{d}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dn}$, si avrà su $\boldsymbol{\Sigma}''_b$:

$$-\frac{2b^2}{r}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}=-\frac{2b^2}{r}\frac{dx}{dr}\left[\frac{dr}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dt}{dn}\right],\ldots$$

per cui, ricordando che è pure su $\boldsymbol{\Sigma}''_b$:

$$\frac{dr}{dn}=-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\,,\ \frac{dt}{dn}=-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\,,$$

si deduce che l' insieme degli integrali, estesi a $\boldsymbol{\Sigma}''_b$, che compaiono in (8) si riduce identicamente a zero.

Su $\boldsymbol{\Sigma}'''_b$ è invece $\dfrac{dt}{dn}=0$, $\dfrac{d}{dn}=\dfrac{d}{dr}$ per cui, su $\boldsymbol{\Sigma}'''_b$, è identicamente

$$\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)u'+\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\right)v'+\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)w'=0$$

e se facciamo diminuire ε indefinitamente sarà:

$$\lim_{\varepsilon=0} 2b^2 \int_{\Sigma_b'''} \frac{1}{r}\left(u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn}\right) d\Sigma_b''' = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}(-b^2)\int_{\Sigma_b'''}\theta\left(u'\frac{dx}{dn} + v'\frac{dy}{dn} + w'\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_b''' = \lim_{\varepsilon=0}(-b^2)\int_{\Sigma_b'''}\theta\left[1 - \frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]d\Sigma_b'''$$

$$= \omega b^4 \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)^2\, \theta(x_1, y_1, z_1, t)\, dt\,,$$

dove ω è eguale a 4π se la parallela all' asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) incontra Σ senza toccarla, è eguale a zero se non l' incontra e rappresenta una parte determinata di 4π se la nominata parallela è tangente a Σ, e t_0 indica il valore di t che corrisponde alla intersezione di Σ con la stessa parallela.

Indicando, quindi, con $S_{4,b}$ e Σ_b ciò che diventano, per $\varepsilon = 0$, $S'_{4,b}$ e Σ'_b la (8) diventerà

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega b^4 \int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)dt = &-\int_{S_{4,b}}\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\left(X\frac{dx}{dr}+Y\frac{dy}{dr}+Z\frac{dz}{dr}\right)dS_{4,b} \\
&-\int_{\Sigma_b}\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\left\{\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dx}{dr}\right. \\
+\left[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dy}{dr} &+ \left.\left[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dz}{dr}\right\}d\Sigma_b \\
-2b^2\int_{\Sigma_b}\left\{\left[\frac{dx}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dx}{dr}\frac{dt}{dn}\right]u\right. &+ \left.\left[\frac{dy}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dy}{dr}\frac{dt}{dn}\right]v+\left[\frac{dz}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dz}{dr}\frac{dt}{dn}\right]w\right\}\frac{d\Sigma_b}{r}.
\end{aligned}\right.$$

Derivando questa equazione una volta rispetto a t_1 e dividendo per $2b^2$, si trova

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega b^2 \int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = &\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(X\frac{dx}{dr}+Y\frac{dy}{dr}+Z\frac{dz}{dr}\right)dS_{4,b} \\
&+\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\left\{\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dx}{dr}\right. \\
+\left[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dy}{dr} &+ \left.\left[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dz}{dr}\right\}d\Sigma_b \\
-\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\left\{\left[\frac{dx}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dx}{dr}\frac{dt}{dn}\right]u\right. &+ \left.\left[\frac{dy}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dy}{dr}\frac{dt}{dn}\right]v+\left[\frac{dz}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dz}{dr}\frac{dt}{dn}\right]w\right\}\frac{d\Sigma_b}{r}.
\end{aligned}\right.$$

4. Per trovare delle formole analoghe alla precedente per ϖ, χ, ϱ prendiamo per S_4 lo spazio $S'_{4,a}$ limitato dalla varietà conica C'

$$\frac{a(t_1-t)}{r}-1=0, \tag{11}$$

dalla varietà cilindrica c e dalla parte Σ'_a della stessa varietà Σ di prima e chiamiamo Σ''_a, Σ'''_a le parti di C' e di c che, insieme a Σ'_a, determinano il contorno completo di $S'_{4,a}$. Per u', v', w' prendiamo invece:

$$u'=\frac{a(t_1-t)}{r}-1\,,\quad v'=0\,,\quad w'=0 \tag{12}$$

a cui corrispondono i valori seguenti di θ'; ϖ', χ', ϱ'; X', Y', Z':

$$\left\{\begin{aligned}&\theta'=\frac{\partial u'}{\partial x}\,,\quad \varpi'=0\,,\quad \chi'=\frac{1}{2}\frac{\partial u'}{\partial z}\,,\quad \varrho'=-\frac{1}{2}\frac{\partial u'}{\partial y}\\ &X'=-(b^2-a^2)\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\,,\ Y'=-(b^2-a^2)\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial y}\,,\ Z'=-(b^2-a^2)\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial z}\,.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Si ha ora:

$$\int_{S'_{4,a}}(X'u+Y'v+Z'w)dS'_{4,a}=(b^2-a^2)\int_{S'_{4,a}}\theta\frac{\partial u'}{\partial x}dS'_{4,a}+(b^2-a^2)\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\frac{\partial u'}{\partial x}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a\,,$$

$$\int\left\{\left[-b^2\theta'\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi'\frac{dz}{dn}-\varrho'\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]u+\cdots\right\}d\Sigma_a$$

$$=-b^2\int\frac{\partial u'}{\partial x}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a+a^2\int\frac{dx}{dn}\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}+v\frac{\partial u'}{\partial y}+w\frac{\partial u'}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$-\int u\left[a^2\frac{du'}{dn}-\frac{du'}{dt}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a\,,$$

per cui la formola (3) diventa

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{S'_{4,a}}u'\,X\,dS'_{4,a}+\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}u'\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a\\ &\quad+a^2\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\left[v\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)+w\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{dx}{du}\right)\right]d\Sigma_a\\ &\quad+\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}u\left[a^2\frac{du'}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a-(b^2-a^2)\int_{S'_{4,a}}\theta\frac{\partial u'}{\partial x}dS'_{4,a}=0\,.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Su Σ''_a e su Σ'''_a è:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{dx}{dn}=0\ ,\quad \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{dx}{dn}=0\,.$$

Osservando inoltre che su Σ''_a è: $u'=0$, $a^2\frac{du'}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}=0$, risulta che l'insieme degli integrali estesi a Σ''_a che compaiono in (14) è identicamente nullo; mentre, osservando che su Σ'''_a è $\frac{dt}{dn}=0$, $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}$ e che quindi:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'''_a} u'\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma'''_a=0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'''_a} u\left[a^2\frac{du'}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma'''_a=-\,\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt\ ,$$

si trova che, per $\varepsilon=0$, l'insieme degli integrali estesi a Σ'''_a si riduce appunto a

$$-\,\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt.$$

Perciò se indichiamo con $S_{4,a}$, Σ_a ciò che diventano $S'_{4,a}$ e Σ'_a, per $\varepsilon=0$, la (14), per $\varepsilon=0$ diventerà

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt\\
=&\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)X\,d\,S_{4,a}+\int_{\Sigma_a}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a\\
&-a^3\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left[v\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dn}-\frac{dy}{dr}\frac{dx}{dn}\right)+w\left(\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dn}-\frac{dz}{dr}\frac{dx}{dn}\right)\right]d\Sigma_a\\
&-a\int_{\Sigma_a}\frac{u}{r}\left[a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}-\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta\,dS_{4,a}\,.\end{aligned}\right.$$

Si otterranno altre due formole analoghe a questa cambiando ciclicamente $u\,,v\,,w\,;\ x\,,y\,,z\,;\ \varpi\,,\chi\,,\varrho$ e $X\,,Y\,,Z$ e, se indichiamo il secondo membro della (15), a meno dell'ultimo termine, con $\omega a U$ e con $\omega a V$, $\omega a W$ indichiamo le espressioni analoghe che si ottengono con la permutazione indicata, la (15) e le altre due analoghe possono scriversi:

$$(16)\begin{cases} a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt = \mathrm{U}+\frac{b^2-a^2}{\omega a}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathrm{S}_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d\mathrm{S}_{4,a} \\ a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,v\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt = \mathrm{V}+\frac{b^2-a^2}{\omega a}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\mathrm{S}_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d\mathrm{S}_{4,a} \\ a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t}(t_1-t)\,w\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt = \mathrm{W}+\frac{b^2-a^2}{\omega a}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\mathrm{S}_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d\mathrm{S}_{4,a} \end{cases}$$

Notiamo la formola

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial u(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)}{\partial x_1}dt-(t_1-t_0)\,u_0\frac{dt_0}{dx_1}$$

e le altre che si ottengono cambiando x_1 in y_1 ed in z_1 e u in v ed in w, dove $u_0 = u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t_0)\,,\ldots$ e le derivate $\frac{dt_0}{dx_1}, \frac{dt_0}{dy_1}, \frac{dt_0}{dz_1}$ sono da ricavarsi dall'equazione $f\,(x\,,y\,,z\,,t) = 0$ di Σ.

Tenendo conto delle equazioni precedenti si ricavano allora, facilmente, dalle (16) le equazioni:

$$(17)\begin{cases} 2a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\varpi\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt = (t_1-t_0)\left[w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\right]+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_1}-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_1} \\ 2a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\chi\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt = (t_1-t_0)\left[u_0\frac{dt_0}{dz_1}-w_0\frac{dt_0}{dx_1}\right]+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_1}-\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_1} \\ 2a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\varrho\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt = (t_1-t_0)\left[v_0\frac{dt_0}{dx_1}-u_0\frac{dt_0}{dy_1}\right]+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1}-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_1}. \end{cases}$$

5. Indichiamo con $\omega\mathrm{T}$ il secondo membro della (10) e con P, Q, R i secondi membri delle (17). Tenendo presenti le equazioni (1), la (10) e le (17) ci permettono allora di scrivere

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)}{\partial t^2}dt = (t_1-t_0)\left[b^2\theta_0\frac{dt_0}{dx_1}+2a^2\left(\chi_0\frac{dt_0}{dz_1}-\varrho_0\frac{dt_0}{dy_1}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z_1}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\mathrm{X}\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t)\,dt\,.$$

Da questa formola e dalle analoghe in v e w, notando che:

$$\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \frac{\partial^2 u(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t^2} dt = u(x_1, y_1, z_1, t_1) - u_0 - (t_1 - t_0) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \ldots$$

si deducono le altre:

$$(18) \begin{cases} u(x_1, y_1, z_1, t_1) = u_0 + (t_1 - t_0) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 + b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dx_1} + 2a^2 \left(\chi_0 \frac{dt_0}{dz_1} - \varrho_0 \frac{dt_0}{dy_1}\right)\right] \\ \qquad + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \, \mathrm{X}(x_1, y_1, z_1, t) \, dt \\ v(x_1, y_1, z_1, t_1) = v_0 + (t_1 - t_0) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 + b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dy_1} + 2a^2 \left(\varrho_0 \frac{dt_0}{dx_1} - \varpi_0 \frac{dt_0}{dz_1}\right)\right] \\ \qquad + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \, \mathrm{Y}(x_1, y_1, z_1, t) \, dt \\ w(x_1, y_1, z_1, t_1) = w_0 + (t_1 - t_0) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 + b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dz_1} + 2a^2 \left(\varpi_0 \frac{dt_0}{dy_1} - \chi_0 \frac{dt_0}{dx_1}\right)\right] \\ \qquad + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z_1} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \, \mathrm{Z}(x_1, y_1, z_1, t) \, dt \end{cases}$$

le quali determinano i valori di u, v, w nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) in funzione dei valori che u, v, w e le derivate parziali di esse rispetto ad x, y, z, t acquistano su Σ_a e Σ_b.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.* Nota di TULLIO LEVI-CIVITA, presentata dal Socio CERRUTI.

Questo lavoro sarà pubblicato nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra la teoria cinetica dei gas.* Nota del dott. CARLO DEL LUNGO, presentata dal Corrispondente ROITI.

In una Nota pubblicata nei *Comptes rendus* del 4 maggio passato, J. Bertrand ha mosso un attacco decisivo contro la teoria cinetica dei gas, dichiarando assolutamente assurdo il noto teorema di Maxwell sulla distribuzione delle velocità molecolari, e ciò, fondandosi sulla prima dimostrazione che ne diede il Maxwell.

L. Boltzmann ha replicato con una lettera (*Compt. rend.* 26 maggio) nella quale, pure accettando il calcolo del Bertrand, dice, che aver dimostrata