

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

I° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Da questa formola e dalle analoghe in  $v$  e  $w$ , notando che :

$$\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \frac{\partial^2 u(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t^2} dt = u(x_1, y_1, z_1, t_1) - u_0 - (t_1 - t_0) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0, \dots$$

si deducono le altre:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} u(x_1, y_1, z_1, t_1) &= u_0 + (t_1 - t_0) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 + b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dx_1} + 2a^2 \left( \chi_0 \frac{dt_0}{dz_1} - \varrho_0 \frac{dt_0}{dy_1} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial y_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) X(x_1, y_1, z_1, t) dt \\ v(x_1, y_1, z_1, t_1) &= v_0 + (t_1 - t_0) \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_0 + b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dy_1} + 2a^2 \left( \varrho_0 \frac{dt_0}{dx_1} - \varpi_0 \frac{dt_0}{dz_1} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial z_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) Y(x_1, y_1, z_1, t) dt \\ w(x_1, y_1, z_1, t_1) &= w_0 + (t_1 - t_0) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_0 + b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dz_1} + 2a^2 \left( \varpi_0 \frac{dt_0}{dy_1} - \chi_0 \frac{dt_0}{dx_1} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial z_1} + \frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) Z(x_1, y_1, z_1, t) dt \end{aligned} \right.$$

le quali determinano i valori di  $u$ ,  $v$ ,  $w$  nel punto  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  in funzione dei valori che  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e le derivate parziali di esse rispetto ad  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  acquistano su  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$ .

**Meccanica.** — *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.* Nota di TULLIO LEVI-CIVITA, presentata dal Socio CERRUTI.

Questo lavoro sarà pubblicato nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Sopra la teoria cinetica dei gas.* Nota del dott. CARLO DEL LUNGO, presentata dal Corrispondente ROITI.

In una Nota pubblicata nei *Comptes rendus* del 4 maggio passato, J. Bertrand ha mosso un attacco decisivo contro la teoria cinetica dei gas, dichiarando assolutamente assurdo il noto teorema di Maxwell sulla distribuzione delle velocità molecolari, e ciò, fondandosi sulla prima dimostrazione che ne diede il Maxwell.

L. Boltzmann ha replicato con una lettera (*Compt. rend.* 26 maggio) nella quale, pure accettando il calcolo del Bertrand, dice, che aver dimostrata

erronea la prima dimostrazione di Maxwell non prova punto la falsità del teorema: e invitando il Bertrand ad esaminare le altre dimostrazioni che egli e diversi altri ne han dato, aggiunge che, se una di queste è esatta, il teorema è vero.

Il Bertrand risponde che la seconda dimostrazione di Maxwell gli pare anche meno accettabile della prima, e che tutte le altre non gli ispirano alcuna fiducia, perchè fondate sulla considerazione degli urti molecolari, dei quali, dice, non si sa nulla. Le sole equazioni per la soluzione del problema son quelle date da lui, e contengono una funzione incognita; ciò gli sembra una buona ragione per non accettare quelle che non ne contengono.

Questa critica ci sembra troppo assoluta. Convien ricordare che tutta la teoria dei gas è fondata sull'ipotesi del movimento delle molecole, considerando le loro collisioni soggette alle leggi generali della meccanica. L'applicazione ci conduce a trovare col calcolo la legge di Boyle, l'indipendenza dell'attrito dalla densità, ed altre proprietà confermate dall'esperienza. Quindi, fino a prova in contrario, dobbiamo ritenere tale ipotesi come conforme alla realtà; e, se fondandosi su di essa, si può dimostrare il teorema di Maxwell, il teorema viene ad avere lo stesso grado di probabilità dell'ipotesi, cioè grandissimo e prossimo alla certezza.

Premesso questo esaminiamo la questione.

Il Maxwell nella sua prima Memoria <sup>(1)</sup> ammise, che le componenti della velocità delle molecole secondo tre direzioni ortogonali, erano fra loro indipendenti; quindi indicando con  $f(x) dx$  il numero di molecole che hanno una velocità secondo l'asse X compresa fra  $x$  e  $x + dx$ , il numero di quelle che secondo i tre assi hanno le componenti della velocità comprese fra  $x$  e  $x + dx$ ,  $y$  e  $y + dy$ ,  $z$  e  $z + dz$ , è dato da

$$f(x) f(y) f(z) dx dy dz;$$

e ne risulta allora che il numero di molecole che hanno una velocità totale compresa fra  $v$  e  $v + dv$  è

$$\frac{4N}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv;$$

dove N è il numero totale delle molecole e  $\alpha$  una costante che dipende dalla densità e dalla temperatura del gas.

Nella sua seconda Memoria <sup>(2)</sup> Maxwell riconobbe che la sua asserzione fondamentale poteva esser discutibile « *may appear precarious* »; e dimostrò lo stesso teorema partendo da un altro principio. Anche a questa se-

<sup>(1)</sup> Philos. Mag. vol. 19, 1860; Scient. papers. vol. I, p. 377.

<sup>(2)</sup> Philos. Mag. vol. 35, 1868; Scient. papers. vol. II, p. 43.

conda dimostrazione, Boltzmann mosse qualche critica, e la modificò adottandola poi nei suoi lavori (1).

O. E. Meyer dimostrò il teorema di Maxwell con metodo nuovo, ma che sollevò alcune critiche: l'autore stesso le riconobbe giuste e modificò la sua dimostrazione nella seconda edizione della *Theorie des Gase* (2).

Ma era rimasta sempre incertezza sul vero valore della prima dimostrazione di Maxwell, la quale aveva certo, rispetto a queste altre, il merito di una grande semplicità. Il Meyer dice in tutte e due le edizioni che il principio enunciato dal Maxwell è *giusto ed evidente di per sè*, ma che per rigore di metodo deve esser dimostrato e non ammesso a priori; e così egli fa (3).

P. G. Tait, nella sua Memoria, *On the foundation of the kin. theory of Gases*, è ancora più esplicito, e giudicando inutilmente intricate le dimostrazioni di Boltzmann, Meyer e altri, ritorna alla prima dimostrazione di Maxwell, sostenendone l'esattezza, e dichiarando che Maxwell, dicendo per scrupolo, poter apparire precario quel principio fondamentale, non intese mai dire che lo fosse in realtà (4).

Stando così le cose è venuta molto opportuna la Nota di J. Bertrand a provare rigorosamente, che non è vera l'asserzione aprioristica di Maxwell, cioè, che in un sistema di molecole in movimento, le componenti della velocità secondo tre assi ortogonali, debbano dirsi sempre indipendenti tra loro.

Il Bertrand, indicando con  $f(v) dv$  il numero di molecole che hanno una velocità compresa fra  $v$  e  $v + dv$ , dimostra che il numero di quelle aventi secondo l'asse X una velocità compresa fra  $x$  e  $x + dx$  è

$$[1] \quad \varphi(x) dx = dx \int_x^{\infty} \frac{f(v) dv}{2v};$$

e il numero di quelle che hanno secondo i tre assi le componenti della velocità comprese fra  $x$  e  $x + dx$ ,  $y$  e  $y + dy$ ,  $z$  e  $z + dz$ , non è come vorrebbe il principio di Maxwell

$$[2] \quad \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) dx dy dz$$

ma è invece

$$[3] \quad \frac{f(v) dx dy dz}{4\pi v^2}.$$

(1) Wiener Sitzungsber. 1868, Bd. 58; 1872, Bd. 66; 1887, Bd. 95. Vorles. über Gastheorie, Leipzig 1896.

(2) Die Kin. Theorie des Gase. Breslau 1877, 2. Aufl. 1895.

(3) 2<sup>o</sup> Aufl. Mat. Zus. p. 29.

(4) Trans. of the R. S. of Edimburg. vol. 33-36; Proceed. 1888, Jan. 30.

La funzione  $f(v)$  soddisfa alla sola condizione

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = N$$

essendo  $N$  il numero totale delle molecole; quindi, egli dice, essa rimane incognita.

Il calcolo del Bertrand è giusto; ma egli considera un sistema di molecole, le cui velocità variabili non sono soggette se non alla condizione espressa dalla funzione arbitraria  $f(v)$ ; la quale non contenendo il tempo, esprime solo che, il numero di molecole che posseggono una data velocità, si mantiene costante.

Ma un sistema isolato di  $N$  molecole di un gas a temperatura costante, è soggetto a qualche condizione ben definita; ovvero, in altre parole, la distribuzione delle velocità molecolari espressa dalla funzione  $f(v)$  è il risultato delle condizioni meccaniche del sistema, le quali, con qualche restrizione relativa alle mutue azioni molecolari, ci sono note in generale.

Infatti decomponendo le  $N$  velocità  $v_1, v_2 \dots v_n$  nelle tre componenti  $x, y, z$ , secondo tre assi ortogonali, pur essendo queste velocità  $v, x, y, z$  funzioni del tempo, possiamo stabilire fra di esse le seguenti relazioni

$$[4] \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \frac{M}{m} \omega^2 = N\omega^2$$

$$[5] \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{M}{m} a = Na \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{M}{m} b = Nb \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n = \frac{M}{m} c = Nc \end{cases}$$

dove  $m$  è la massa di ciascuna molecola,  $M$  la massa totale del gas,  $a, b, c$  le componenti di velocità del centro di massa, e  $\omega^2$  la media dei quadrati delle velocità, la quale è costante, essendo costante la temperatura. Se il gas è in quiete sarà  $a = b = c = 0$ .

Rifacciamo con queste condizioni il calcolo del Bertrand. Sia  $Nf(v) dv$  il numero delle molecole che hanno la velocità totale compresa fra  $v$  e  $v + dv$ ; il numero di quelle che hanno secondo un asse la velocità compresa fra  $x$  e  $x + dx$ , sarà  $N\varphi(x) dx$ , essendo per la [1]

$$\varphi(x) = \int_x^{\infty} \frac{f(v) dv}{2v}.$$

Derivando rapporto ad  $x$ , e ponendo poi  $v$  in luogo di  $x$ , avremo

$$[6] \quad f(v) = -2v \varphi'(v).$$

Il problema si riduce quindi a cercare la forma di  $\varphi$ .

La funzione  $\varphi(x)$  esprime la probabilità relativa, che una molecola abbia secondo un asse, una velocità  $x$ ; e, poichè una velocità  $-x$  è egualmente probabile come una  $+x$ , deve essere  $\varphi(x) = \varphi(-x)$ , ovvero

$$\varphi(x) = \psi(x^2).$$

Il suo valore come quello di una probabilità sarà per tutti i valori di  $x$ , positivo e compreso fra 0 e 1.

E poichè anche  $f(v)$  esprime una probabilità, e deve quindi essere positiva, deve essere per la [6] sempre

$$\varphi'(x) < 0.$$

Dunque la  $\varphi$  è sempre decrescente e avrà il suo massimo per  $x = 0$  e il minimo per  $x = \pm \infty$ .

Deve inoltre soddisfare alle seguenti relazioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad \text{ovvero poichè } \varphi(x) = \varphi(-x) \quad \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2}$$

e poichè

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad \text{per la [6] sarà} \quad \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

per le [5] sarà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = 0$$

essendo il gas in quiete; e per la [4]

$$\int_0^{\infty} x^3 \varphi'(x) dx = -\frac{\omega^2}{2}$$

ponendo  $x$  in luogo di  $v$ .

Una funzione che soddisfa a tutte queste condizioni è quella trovata da Maxwell e da tutti gli altri, cioè

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \text{dove} \quad \alpha^2 = \frac{2}{3}\omega^2.$$

Tale essendo dunque la forma della funzione  $\varphi(x)$  ne risulta per la [6]

$$f(v) = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}.$$

Ma allora sembra esser vero il principio di Maxwell, che le tre componenti della velocità siano indipendenti fra loro, perchè sono identiche le due [2] e [3], cioè si ha

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = \frac{f(v)}{4\pi v^2}.$$

Resta quindi da domandarsi, come, Maxwell partendo da un principio erroneo abbia potuto dare la vera forma della funzione  $\varphi$ ; e come, dall'altro lato Meyer, Boltzmann e altri giungendo per altra via allo stesso risultato, vengano a provare vera l'asserzione di Maxwell.

Crediamo che il procedimento del presente lavoro risolva questa questione. Il principio ammesso da Maxwell non è vero in generale, cioè nel caso di un sistema di particelle in movimento, le cui velocità variabili dipendano da una funzione arbitraria  $f(v)$ . Ma in un sistema isolato di molecole gassose costituenti una massa di gas omogeneo e in quiete, la funzione  $f(v)$  della distribuzione non è arbitraria, perchè dipende dai principi generali della meccanica, della conservazione della forza viva e della quantità di moto. In tal caso l'asserzione di Maxwell è vera; e può stabilirsi *a priori* l'indipendenza delle componenti delle velocità secondo tre direzioni ortogonali.

Infatti fra le componenti delle velocità molecolari abbiamo le relazioni [5]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0 \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 \end{cases}$$

le quali dimostrano che le componenti  $x$  sono fra loro dipendenti, ma sono indipendenti dalle  $y$  e dalle  $z$ .

Fra i quadrati delle medesime velocità vi è la relazione

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + \dots + (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2) = N\omega^2$$

e indicando con P la pressione e V il volume si ha

$$P = \frac{M\omega^2}{3V} = \frac{mN\omega^2}{3V}.$$

Ma la pressione sopra un piano parallelo al piano  $yz$  è data da

$$\frac{m}{V} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2);$$

e siccome, essendo il gas in quiete, sta in fatto che la pressione è eguale in ogni verso, deve essere

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{N\omega^2}{3} \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \frac{N\omega^2}{3} \\ z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = \frac{N\omega^2}{3} \end{array} \right.$$

quindi, anche rispetto alla conservazione della forza viva, le velocità  $x$  sono indipendenti dalle velocità  $y$  e  $z$ .

Come si vede, la condizione perchè sia vero il principio di Maxwell, è che le molecole abbiano tutte la stessa massa, cioè che il gas sia omogeneo.

**Paleontologia.** — *Notizia sopra la ittiofauna sarda.* Nota del prof. D. LOVISATO, presentata dal Socio CAPELLINI.

**Paleontologia.** — *Intorno agli avanzi di Coccodrilliano scoperti a San Valentino (provincia di Reggio Emilia) nel 1886.* Nota del dott. VITTORIO SIMONELLI, presentata dal Socio CAPELLINI.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.