ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 16 agosto 1896.

Meccanica. — *Sulla stabilità dell'equilibrio, e sopra una proposizione di Lagrange.* Nota del Socio F. Siacci.

Il sig. Appell nel suo *Traité de mécanique rationelle* (tome deuxième, p. 354) trattando della stabilità dell'equilibrio, scrive: « On peut démontrer « que, si dans une certaine position d'un système, les derivées $\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots,$ « $\frac{\partial U}{\partial q_k}$ sont toutes nulles *sans que* U (funzione delle forze) *soit maximum*, « la position d'équilibre correspondante est *instable*. M. Siacci nous a in- « formé récemment qu'il était arrivé à une démonstration rigoureuse de cette « proposition ». Dopo quest' annunzio (dettato evidentemente da un pensiero, di cui debbo esser grato al sig. Appell) mi è impossibile tacere, che essendo ritornato in questi giorni su quella dimostrazione, che del resto non ho mai pubblicata, l'ho trovata non solo non rigorosa, ma assolutamente erronea, perchè fondata sopra una proposizione non vera.

Importa notare questa proposizione, in quanto che essa è contenuta nella *Mécanique Analytique*, e vi è data, anzi, come un principio di Statica. Essa è la seguente: « *de toutes les situations que prend successivement le système, celle où il a la plus grande ou la plus petite force vive est aussi celle où il le faudrait placer d'abord pour qu'il restât en équilibre* » (1). Ora questa proposizione, presentata fin dal 1748 dal Marchese di Courtivron all'*Académie des Sciences* come un nuovo principio di Statica, e come tale accolta da Lagrange in due edizioni del suo capolavoro, e nelle altre due lasciata pas-

(1) *Mécanique Analytique.* Première partie, section III, art. 22. (Quatrième édition, tome Ier, pag. 70).

sare pacificamente da critici [1] sagacissimi come il Bertrand e il Darboux, non solo è falsa, ma potrebbe anche dirsi evidentemente falsa, in quanto che la smentiscono i moti più chiari e più comuni, come il moto ellittico dei pianeti, il moto del pendolo conico o piano, il moto dei proietti.....

È vera invece la proposizione inversa, cioè: *Se il sistema passa per una posizione, ove potrebbe stare in equilibrio, ivi la forza viva è massima, o minima, o massima-minima*. È questa la proposizione in realtà dimostrata da Lagrange.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Beltrami.

Il lettore voglia riferirsi ad una Nota apparsa non è guari in questi Rendiconti col medesimo titolo, qui sopra indicato [2].

4. Le considerazioni gruppali si possono usufruire con vantaggio nel ricercare se esistono funzioni delle forze V, per cui si abbiano, oltre all'integrale delle forze vive, due altri integrali lineari delle equazioni del moto e per cui quindi la integrazione si riduca alle quadrature.

Se una equazione $L = \text{cost}$, il cui primo membro L sia lineare (nel qual caso, come è facile stabilire, si può addirittura assumere omogeneo [3]) nelle velocità, si suppone integrale pel moto del corpo, quando agiscono forze, essa riesce integrale anche in assenza di forze; dunque L, espresso per le p, è necessariamente una combinazione lineare *a coefficienti costanti* di $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$: Una combinazione Yf siffatta sarà poi integrale, allora [4] e solo allora che $YV = 0$. Perchè esistano ad un tempo due integrali lineari indipendenti $L_1 = \text{cost}$, $L_2 = \text{cost}$, occorre adunque che il potenziale V delle forze attive soddisfaccia simultaneamente a due equazioni indipendenti:

$$Y_1 V = g_{11} Z_1 V + g_{12} Z_2 V + g_{13} Z_3 V = 0$$
$$Y_2 V = g_{21} Z_1 V + g_{22} Z_2 V + g_{23} Z_3 V = 0 ,$$

i coefficienti numerici g, potendo essere scelti in modo arbitrario. Affinchè due equazioni indipendenti $Y_1 V = 0$ e $Y_2 V = 0$ abbiano una soluzione comune (diversa da $V = \text{cost}$) è necessario e basta che il sistema $Y_1 f = 0$, $Y_2 f = 0$ sia completo, cioè che $(Y_1 Y_2) f$ sia una combinazione lineare, e, in causa delle (5), a coefficienti costanti, di $Y_1 f$, $Y_2 f$. Ne viene che $Y_1 f$, $Y_2 f$ determinano un sottogruppo a due parametri di G_3 come reciprocamente ad ogni sottogruppo ∞^2 di G_3 corrisponde un potenziale dotato della voluta pro-

(1) « *Cette critique minutieuse qui porte parfois sur le sens d'un mot...* » (Bertrand, *Avertissement de la troisième édition*).

(2) V. questi Rendiconti, p. 3.

(3) Cfr. la Nota citata: *Sugli integrali algebrici*, ecc.

(4) Infatti la condizione affinchè $L = \text{cost}$ sia integrale, quando agiscono le forze derivanti dal potenziale V, è che le due funzioni $T - V, L$ sieno in involuzione; ora $(T - V, L) = 0$, si scinde precisamente in $(T, L) = 0$, $(L, V) = 0$.