ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° novembre 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle equazioni modulari.* Nota del Socio F. Brioschi.

1°. In una Comunicazione, collo stesso titolo, da me presentata all' Accademia nel settembre dell' anno 1893, io osservava che dalle funzioni di $\mathfrak{p}(u)$ indicate da Halphen nel suo *Traité des fonctions elliptiques* (vol. I, pag. 96) con

$$\psi_2(u)\,,\ \psi_3(u)\,,\ \psi_4(u)$$

ottenevasi la relazione:

$$\mathfrak{p}(u) = \frac{1}{12\psi_2^4\,\psi_3^2}\left[(\psi_4 + \psi_2^5)^2 + 4\psi_2^2\,\psi_3^3\right]$$

e quindi ponendo [1]:

$$\psi_3 = h^{\frac{1}{3}}\,\psi_2^{\frac{8}{3}} \qquad \psi_4 = k\psi_2^5$$

risultava:

$$\mathfrak{p}(u) = \frac{1}{12}\varrho\left[(k+1)^2 + 4h\right] \tag{1}$$

essendo:

$$\varrho = \frac{\psi_2^6}{\psi_3^2} = \left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$$

[1] Le lettere $h\,, k$ sostituiscono le $x\,, y$ di Halphen.

Che inoltre nella formola di moltiplicazione (pag. 100):

$$(2) \qquad \wp(mu) = \wp(u) - \varrho h^{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_{m+1}\gamma_{m-1}}{\gamma_m^2}$$

essendo:

$$\gamma_2 = 1 \qquad \gamma_3 = h^{\frac{1}{3}} \qquad \gamma_4 = k$$

e le $\gamma_5, \gamma_6 \dots$ funzioni di γ_3, γ_4, ossia di h, k; le $\wp(u), \wp(2u), \wp(3u) \dots$ si ponno esprimere in funzione di ϱ, h, k.

In quella stessa Comunicazione osservava ancora come gli invarianti g_2, g_3, ed il discriminante:

$$\delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

potevano esprimersi in funzione di ϱ, h, k; essendo per esempio:

$$(3) \qquad \delta = -\varrho^6 h^3 \Big[k(k+1)^3 + 8h(k+1)^2 + 16h^2 - 36hk - 9h\Big]$$

e che infine nella ipotesi di

$$u = v = \frac{2\omega}{n}$$

risultando:

$$\gamma_n = 0$$

cioè una ulteriore relazione fra h, k; conseguiva che fra una funzione qualsivoglia delle $\wp(v), \wp(2v) \dots$; le g_2, g_3; o le g_2, δ; oppure le g_3, δ; e la $\gamma_n = 0$, potevansi eliminare le quantità ϱ, h, k.

Così ad esempio per $n = 5$, siccome la equazione $\gamma_5 = 0$ dà:

$$h = k$$

quindi:

$$\wp(v) = \frac{\varrho}{12}(k^2 + 6k + 1)$$

$$\wp(2v) = \frac{\varrho}{12}(k^2 - 6k + 1)$$

e:

$$\wp(v) - \wp(2v) = \varrho k$$

inoltre:

$$g_2 = \frac{\varrho^2}{12}\Big[k^4 + 12k^3 + 14k^2 - 12k + 1\Big]$$

$$\delta = -\varrho^6 k^5 (k^2 + 11k - 1);$$

ponendo:

$$\frac{\delta}{[\wp(v) - \wp(2v)]^6} = \xi$$

sarà:

$$\xi = -\frac{1}{k}(k^2 + 11k - 1)$$

quindi:

$$\xi^2 + 10\xi + 5 = \frac{1}{k^2}\left[k^4 + 12k^3 + 14k^2 - 12k + 1\right]$$

e:

$$\delta = \varrho^6 k^6 \xi \quad , \quad \frac{1}{k^2} = \varrho^2 \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

da cui:

$$\xi^2 + 10\xi - 12\frac{\varrho^2}{\delta^{\frac{1}{3}}}\xi^{\frac{1}{3}} + 5 = 0$$

nota equazione modulare per la trasformazione del quinto ordine.

2°. Se non che la equazione $\gamma_n = 0$ la quale anche pel caso di $n = 6$ darebbe:

$$h = k(1 - k)$$

pei casi successivi condurrebbe ad equazioni dei gradi 2°, 3°... in h, e quindi la eliminazione presenta difficoltà non lievi.

Il sig. Greenhill, nel suo interessante lavoro, *Pseudo-Elliptic Integrals and their Dynamical Applications* (1) le ha d'assai diminuite sostituendo ad h e k funzioni di due nuove quantità per le quali la equazione $\gamma_n = 0$ si abbassa di grado.

Ora, supposto che per questa via dai valori di $\wp(v)$, $\wp(2v)$ ... e da quello di δ si elimini ϱ ed una di quelle quantità, si otterranno per $\wp(v)$, $\wp(2v)$ ... espressioni formate con una sola indeterminata. D'altra parte le $\wp(v)$, $\wp(2v)$ ..., come è noto, sono radici di una equazione, di cui il polinomio primo membro figura nella formola di trasformazione. È evidente che la ricerca del valore della indeterminata in funzione degli invarianti di quel polinomio equivale alla risoluzione della menzionata equazione, equazione risolubile per radicali, qualunque ne sia il grado, perchè Abeliana.

Considereremo nei paragrafi seguenti i tre casi di $n = 7$, $n = 9$, $n = 13$; nel primo la equazione risultando del 3° grado l'unico invariante è il discriminante Δ; nel secondo la equazione è del 4° grado e si hanno i due invarianti A, B quadratico e cubico; infine nel terzo la equazione è del grado 6° e si hanno gli invarianti A, L, M, R dei gradi 2°, 4°, 6°, 15° ed il discriminante Δ.

3°. Sia $n = 7$, si ha:

$$\gamma_7 = h^2 - hk + k^3$$

(1) Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXV, 1893, 1894. Vedi anche dello stesso autore, *The Transformation and Division of Elliptic Functions*. Proceedings, Vol. XXVII, 1896.

la quale, ponendo col sig. Greenhill:

$$h = k(1-q)$$

dà per h e k i valori:

$$k = q(1-q) \qquad h = q(1-q)^2$$

Sostituiti questi valori nella espressione (3) di δ, si ottiene:

$$\delta = \varrho^6 q^7 (1-q^7)[q^3 + 5q^2 - 8q + 1]$$

ma dalla formola (2) si ha:

$$\Delta = \Big[\mathfrak{p}(v) - \mathfrak{p}(2v)\Big]^2 \Big[\mathfrak{p}(2v) - \mathfrak{p}(3v)\Big]^2 \Big[\mathfrak{p}(3v) - \mathfrak{p}(v)\Big]^2 = \varrho^6 h^2 k^2 (k-h)^2$$

quindi:

$$\Delta = \varrho^6 q^8 (1-q)^8$$

e:

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{q^3 + 5q^2 - 8q + 1}{q(1-q)}$$

Indico con ξ il secondo membro e:

$$2\varepsilon + 1 = \sqrt{-3}$$

inoltre:

$$\xi + 8 + 3\varepsilon = \alpha^3 \qquad \xi + 8 + 3\varepsilon^2 = \beta^3$$

si otterranno le:

$$\alpha^3 = \frac{(\varepsilon q + 1)^3}{q(1-q)} \qquad \beta^3 = \frac{(\varepsilon^2 q + 1)^3}{q(1-q)}$$

da cui:

$$q = -\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon^2 \alpha - \varepsilon \beta}$$

Per questo valore di q i valori di $\mathfrak{p}(v)$, $\mathfrak{p}(2v)$, $\mathfrak{p}(3v)$ diventano:

$$\mathfrak{p}(v) \;\; = -a_1 + \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}(\alpha + \beta)$$

$$\mathfrak{p}(2v) = -a_1 + \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}(\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta)$$

$$\mathfrak{p}(3v) = -a_1 + \tfrac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{6}}(\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta)$$

essendo:

$$a_1 = -\frac{1}{12}\Delta^{\frac{1}{6}}(\xi^2 + 13\xi + 49)^{\frac{2}{3}}$$

od anche:

$$a_1 = -\frac{1}{12}\Delta^{\frac{1}{6}}\alpha^2\beta^2$$

Nella trasformazione delle funzioni ellittiche del 7° ordine, se indicando con $\bar{\delta}$ il valore di δ trasformato, si pone:

$$z=\left(\frac{\bar{\delta}}{\delta}\right)^{\frac{1}{24}}$$

si ha:

$$\xi = z^4$$

quindi i valori di $\wp(v)$, $\wp(2v)$, $\wp(3v)$ possono esprimersi per δ e z.

Si possono porre a confronto questi valori con quelli dati da Halphen al Capitolo 2° (pag. 60) vol. 3°.

4°. Consideriamo in secondo luogo il caso di $n=9$. La equazione $\gamma_9=0$ dà:

$$k^3(k-h-k^2)-(k-h)^3=0$$

la quale ponendo come sopra:

$$k-h=kq \qquad \text{inoltre} \quad q-k=\frac{q^2}{p}$$

riducesi alla:

$$k=pq$$

quindi:

$$q=p(1-p) \qquad k=p^2(1-p) \qquad h=p^2(1-p)(1-p+p^2)$$

Dalla equazione (3) per questi valori si ottiene:

$$\delta=\varrho^6 p^{10}(1-p)^{10}(1-p+p^2)^3\,\xi$$

posto (¹):

$$\xi=-\frac{p^3-6p^2+3p+1}{p(1-p)}$$

ed in conseguenza:

$$\xi^2+9\xi+27=\frac{(1-p+p^2)^3}{p^2(1-p)^2}$$

Si indichino con α^3, β^3 le espressioni:

$$\xi+6+3\varepsilon=\alpha^3 \quad , \quad \xi+6+3\varepsilon^2=\beta^3$$

$$2\varepsilon+1=\sqrt{-3}$$

ponendo nelle medesime il valore superiore di ξ si deducono le:

$$\alpha^3=-\frac{(\varepsilon^2p+1)^3}{p(1-p)} \quad , \quad \beta^3=-\frac{(\varepsilon p+1)^3}{p(1-p)}$$

(¹) Nella corrispondente formola del sig. Greenhill (pag. 233) vi è un lieve errore di calcolo.

da cui:

$$p = -\frac{\alpha - \beta}{\varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta}$$

od anche:

$$p = \tfrac{1}{3}\left[\alpha\beta\,(\varepsilon\alpha + \alpha^2\beta) + \xi + 6\right]$$

I valori degli invarianti quadratico e cubico, e del discriminante della equazione le radici della quale sono le $\mathfrak{p}(v)\,,\mathfrak{p}(2v)\ldots$ si possono così rappresentare:

$$4^3\,.\,\Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{\xi}$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = -\frac{4}{3^3}\cdot\alpha\beta \quad , \quad \frac{\mathrm{B}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{3^3}(\alpha^3 + \beta^3)$$

notando essere:

$$\alpha^3\,\beta^3 = \xi^2 + 9\,\xi + 27 \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 2\,\xi + 9$$

I valori delle radici $\mathfrak{p}(v)\,,\mathfrak{p}(2v)\ldots$ in funzione di ξ, δ, sono

$$\mathfrak{p}(v) \;\;= -\,a_1 + \frac{\sigma}{12}\Big[4\alpha\beta\,(\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta) + \xi + 6\Big]$$

$$\mathfrak{p}(2v) = -\,a_1 + \frac{\sigma}{12}\Big[4\alpha\beta\,(\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta) + \xi + 6\Big]$$

$$\mathfrak{p}(3v) = -\,a_1 - \frac{\sigma}{4}\,(\xi + 6)$$

$$\mathfrak{p}(4v) = -\,a_1 + \frac{\sigma}{12}\Big[4\alpha\beta\,(\alpha + \beta) + \xi + 6\Big]$$

nelle quali

$$\sigma = \left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}\,\beta^{\frac{1}{2}}}$$

ed:

$$a_1 = -\frac{\sigma}{12}\,\alpha^3\,\beta^3$$

Il valore di

$$\mathfrak{p}(3v) = \mathfrak{p}\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

per quello di a_1 diventa:

$$\mathfrak{p}(3v) = \frac{\sigma}{12}\,(\xi + 3)^2$$

ed essendo, come è noto:

$$\mathfrak{p}^4(3v) - \tfrac{1}{2}\,g_2\,\mathfrak{p}^2(3v) - g_3\,\mathfrak{p}(3v) - \frac{1}{3\,.\,4^2}\,g_2{}^2 = 0$$

la equazione è soddisfatta dai valori:

$$3 \,.\, 4 \,\frac{g_2}{\sigma^2} = (\xi + 3)\left[(\xi + 3)^3 - 3 \,.\, 8\right]$$

$$8 \,.\, 3^3 \,\frac{g_3}{\sigma^3} = -(\xi + 3)^6 + 3^2 \,.\, 4 \,.\, (\xi + 3)^3 - 8 \,.\, 3^3$$

come appunto dà la trasformazione del sesto ordine ([1]).

Notiamo infine che le radici $\wp(v)$, $\wp(2v)$ ... possono anche esprimersi in funzione di A, B, $\varDelta$; in quanto che:

$$\alpha^3 = \frac{3\sqrt{-3}}{2\varDelta^{\frac{1}{2}}}\left(\varDelta^{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{-3} \,.\, \mathrm{B}\right) \qquad \beta^3 = -\frac{3\sqrt{-3}}{2\varDelta^{\frac{1}{2}}}\left(\varDelta^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{-3} \,.\, \mathrm{B}\right)$$

$$\xi + 6 = \frac{3}{2\,\varDelta^{\frac{1}{2}}}\left(\varDelta^{\frac{1}{2}} - 9\mathrm{B}\right) \qquad \sigma = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\varDelta^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}$$

e così anche i valori di g_2, g_3.

5°. Passiamo da ultimo al caso di $n = 13$. Ponendo come nei casi precedenti

$$k - h = kq \quad , \quad q - k = \frac{q^2}{p}$$

ed introducendo una nuova quantità r legata alle altre dalla relazione:

$$q = r(p - 1)$$

la condizione $\gamma_{13} = 0$, come ha dimostrato il sig. Greenhill, si riduce alla

$$\mathrm{P}^2 - t\,\mathrm{P} - 1 = 0$$

nella quale:

$$\mathrm{P} = \frac{p + r}{r(r + 1)} \qquad t = \frac{1 + 2r - r^2 - r^3}{r(r + 1)}$$

Il valore di δ calcolato colla formola (3) ha questa semplice forma:

$$\delta = \sigma^2\,\mathrm{P}^2\,\xi$$

nella quale:

$$\sigma = \varrho^3\,\frac{k^2\,q^4}{r^4} \quad , \quad \xi = t - 3$$

Anche in questo caso, posto:

$$\alpha^3 = \xi + 4 + 3\,\varepsilon \quad , \quad \beta^3 = \xi + 4 + 3\,\varepsilon^2$$

ottiensi:

$$r = \frac{\alpha - \beta}{\varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta}$$

$$\alpha^3\,\beta^3 = \xi^2 + 5\,\xi + 13 \quad , \quad \alpha^3 + \beta^3 = 2\,\xi + 5$$

([1]) Kiepert, Math. Annalen, XXXII, pag. 66.

ed i valori delle radici $\wp(v)$, $\wp(2v)$... in funzione di ξ, δ raggruppati convenientemente sono:

$$\wp(v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\left[b^3c + (b-c)\sqrt{-3}\,.\,\mathrm{T}\right]$$

$$\wp(3v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\left[c^3a + (c-a)\sqrt{-3}\,.\,\mathrm{T}\right]$$

$$\wp(4v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\left[a^3b + (a-b)\sqrt{-3}\,.\,\mathrm{T}\right]$$

$$\wp(5v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\left[-b^3c + (b-c)\sqrt{-3}\,\mathrm{T}\right]$$

$$\wp(2v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\left[-c^3a + (c-a)\sqrt{-3}\,\mathrm{T}\right]$$

$$\wp(6v) = -a_1 + \frac{1}{2.3^2}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\left[-a^3b + (a-b)\sqrt{-3}\,\mathrm{T}\right]$$

nelle quali:

$$a = \varepsilon^2\alpha - \varepsilon\beta \quad , \quad b = \varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta \quad , \quad c = \alpha - \beta$$

e:

$$\mathrm{T} = \sqrt{t^2+4} = (\xi^2 + 6\xi + 13)^{\frac{1}{2}}$$

infine:

$$a_1 = -\frac{1}{12}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{\frac{1}{6}}\alpha^2\beta^2\,\mathrm{T}$$

Quanto agli invarianti A, L, M, R dei gradi 2°, 4°, 6°, 15° ed al discriminante Δ, si ottengono i seguenti valori:

$$-3.5.8.\frac{\mathrm{A}}{\Delta^{\frac{1}{5}}} = 3\xi^2 + 16\xi + 36$$

$$-3^2\,\frac{\mathrm{L}}{\Delta^{\frac{2}{5}}} = \xi^2 + 6\xi + 15$$

$$4.3^3.\frac{\mathrm{M}}{\Delta^{\frac{3}{5}}} = 4\xi^3 + 4.3^2.\xi^2 + 13.3^2.\xi + 2.3^4$$

$$-\frac{\mathrm{R}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} = \alpha^3\beta^3(\alpha^3+\beta^3)\,t\,\mathrm{T}$$

da ultimo:

$$\Delta^{\frac{1}{5}} = \frac{\delta}{\xi}$$

La eliminazione di ξ fra i valori dei primi tre invarianti conduce a due relazioni di condizione fra gli invarianti di questa speciale equazione Abeliana.