ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 novembre 1896.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa.* Nota di A. DEL RE, presentata dal Socio F. SIACCI.

Alcune ricerche dirette allo scopo di trattare dei punti e delle linee brillanti di una superficie in una metrica generale, e che appariranno nella mia Memoria: *Ricerche geometriche diverse* ecc., in corso di stampa negli Atti della R. Accademia di Modena, mi hanno condotto, in una maniera elegante e semplicissima, a dare le formule per rappresentare la trasformazione risultante da m date proiezioni successive di una varietà quadratica (comunque estesa) in sè stessa (cioè, a parte un caso, la trasformazione generale di una siffatta varietà in sè), trasformazione che si collega a parecchie altre quistioni importanti, p. es. a quella della iscrizione nella varietà di poligoni circoscritti a poligoni dati, alla teoria dei moti rigidi in uno spazio a curvatura costante, alla teoria delle trasformazioni *isogonali* nel piano e nello spazio, ecc. Lo scopo di questa breve Nota è appunto quello di far conoscere siffatte formule, e di trattare insieme di qualche altra quistione che si rannoda al medesimo ordine di considerazioni.

1. Sia $\varphi = \sum a_{ik}\, u_i\, u_k = 0$ l'equazione di una varietà quadratica φ ad $n-1$ dimensioni di uno spazio lineare ad n dimensioni S_n, scritta in coordinate iperplanari $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$. Per brevità, indichiamo con φ_h il risultato della sostituzione in φ delle $u_1^{(h)}, u_2^{(h)}, \dots, u_{n+1}^{(h)}$, dove le $u_i^{(h)}$

$(i=1,2,\ldots,n+1)$ sono le coordinate di un determinato iperpiano π_h (non tangente a φ); indi estendiamo ad $n+1$ variabili il processo di ragionamento fatto nel n. 1 della cit. Memoria; avremo le formule

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varrho\xi'_i=\varphi_h\,\xi_i-u_\xi^{(h)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}} \\ (i=1,2,\ldots,n+1) \end{array}\right.$$

le quali dicono che, nell' S_n di assoluto φ, i raggi di luce che escono dal punto ξ_i $(i=1,2,\ldots,n+1)$, quando in S_n si ammette l'ordinaria legge per la riflessione della luce, passano, dopo la riflessione sull'iperpiano π_h, pel punto ξ'_i $(i=1,2,\ldots,n+1)$. Ora, io dico che *le formule* (1), per le $u_i^{(h)}$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$ tenute fisse, e le ξ_i, ξ'_i variabili, *rappresentano la proiezione di φ su sè stessa eseguita dal polo* P_h *dell' iperpiano* π_h.

In fatti, dicendo Φ_{xx} la forma quadratica aggiunta della φ, cioè ponendo $\Phi_{xx}=\sum A_{ik}\,x_i\,x_k$, ove A_{ik} è il sub-determinante complementare dell' elemento a_{ik} nel determinante $\varDelta=|a_{ik}|$ di φ, si ha, dalle (1)

$$\varrho^2\Phi_{\xi'\xi'}=\varphi_h^2\,\Phi_{\xi\xi}-\varphi_h\,u_\xi\sum\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}+4\varDelta u_\xi^2\varphi_h\,;$$

ma, siccome dal porre $\lambda_i=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}$, si cava $\xi_i=\dfrac{1}{2\varDelta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}$, e quindi poi, anche

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}=2\sum\lambda_i\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}=2\sum u_i\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}=4\varDelta\sum u_i\,\xi_i=4\varDelta u_\xi\,,$$

così si avrà

$$\varrho^2\Phi_{\xi'\xi'}=\varphi_h^2\,\Phi_{\xi\xi}-4\varDelta\,\varphi_h\,u_\xi^2+4\varDelta\,\varphi_h\,u_\xi^2=\varphi_h^2\,\Phi_{\xi\xi}\,;$$

epperò, se è $\Phi_{\xi\xi}=0$, è pure $\Phi_{\xi'\xi'}=0$, cioè *le* (1) *conservano* φ.

Inoltre, dalle (1) abbiamo pure

$$\varrho u_{\xi'}^{(h)}=\varphi_h u_\xi^{(h)}-u_\xi^{(h)}\sum u_i^{(h)}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}=-\varphi_h u_\xi^{(h)}\,;$$

dunque, al posto delle (1) possiamo pure scrivere, per $i=1,2,\ldots,n+1$ le seguenti:

$$\varrho\xi'_i=\varphi_h\,\xi_i+\frac{\varrho u_{\xi'}^{(h)}}{\varphi_h}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}\,,$$

ovvero:

$$\varrho\,\varphi_h\,\xi'_i=\varphi_h^2\,\xi_i+\varrho u_{\xi'}^{(h)}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}\,,$$

o finalmente

$$\frac{\varphi_h^2}{\varrho}\,\xi_i=\varphi_h\,\xi'_i-u_{\xi'}^{(h)}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}\,;$$

dunque *la relazione fra le ξ_i, ξ'_i, data dalle* (1) *è involutoria.*

Infine, dalle (1) si ha pure che, se è $u_\xi^{(h)} = 0$, sarà

$$\varrho\,\xi'_i = \varphi_h\,\xi_i \equiv \xi_i\,;$$

epperò, le (1) *conservano*, punto per punto, l'iperpiano π_h. Tutte queste proprietà dimostrano la verità dell'asserzione testè fatta [1].

2. Prendiamo un gruppo di m relazioni come le (1), ottenute con m iperpiani $u_1^{(1)}, \dots, u_{n+1}^{(1)}$; $u_1^{(2)}, \dots, u_{n+1}^{(2)}$; ... ; $u_1^{(m)}, \dots, u_{n+1}^{(m)}$; ma, per semplicità di scrittura, scriviamo (r) al posto di $u^{(r)}$, e sopprimiamo (perchè ciò non darà luogo a confusione) gli indici i; indi, componiamo successivamente la 1ª con la 2ª, il risultato ottenuto con la 3ª, e così via, le m sostituzioni

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi' &\equiv \varphi_1\,\xi - (1)_\xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial(1)} \\ \xi' &\equiv \varphi_2\,\xi - (2)_\xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial(2)}\,; \\ &\dots\dots\dots \\ \xi' &\equiv \varphi_m\xi - (m)_\xi\,\frac{\partial\varphi}{\partial(m)} \end{aligned}\right.$$

avremo, indicando con $R_1, R_2, \dots, R_m$ siffatte sostituzioni (proiezioni di φ su se stessa) e scrivendo $\varphi_{qr} = \varphi_{rq}$ al posto di $\sum q_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial r_i}$, quanto segue:

(1) Si può dare alle formule (1) un'altra forma, non meno elegante, nella quale appariscono le coordinate del centro di proiezione. Infatti, dette h_i le coordinate del polo P_h dell'iperpiano $u_i^{(h)}$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$, possiamo scrivere $u_i^{(h)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial h_i}$ $(i=1,2,\dots,n+1)$, dalle quali seguono le altre $h_i = \dfrac{1}{2\varDelta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$. Ma è $\varphi_h = \dfrac{1}{2}\sum u_i^{(h)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}}$, dunque sarà:

$$\varphi_h = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial h_i}\,.\,2\,\varDelta\,h_i = \frac{\varDelta}{2}\sum h_i\frac{\partial\Phi}{\partial h_i} = \varDelta\Phi_{hh}\,;$$

e le formule (1) diventano, perciò, le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\xi_i' &= \varDelta\,\Phi_{hh}\,\xi_i - \frac{1}{2}\sum_k \xi_k\frac{\partial\Phi}{\partial h_k}\,.\,2\,\varDelta\,h_i \\ &(i = 1, 2, \dots, n+1) \end{aligned}\right\};$$

ovvero, poichè è $\varDelta \neq 0$,

$$(1')\qquad \sigma\,\xi'_i = \Phi_{hh}\,\xi_i - h_i\,\Phi_{\xi h}\ (i = 1, 2, \dots, n+1)\,.$$

Formule analoghe a queste, per $n = 3$, furono date dal Cayley nella sua Nota: *On the Homographic Transformation of a surface of the second order into itself* (Philosophical Magazine, vol. VI, 1853, o anche Mathematical Papers, vol. II); ma l'eminente geometra non accenna al modo come vi pervenne, mentre che la via da noi seguita ha il vantaggio di mostrare come sotto le medesime formule, diversamente interpetrate, si hanno le trasformazioni doppie in un *n-spazio*, cui son congiunte delle involuzioni di Hirst, come si vedrà dalla lettura della nostra cit. Memoria.

1° La sostituzione $R_2 R_1$ è data dalle formule

$$\xi' \equiv \varphi_1 \left\{ \varphi_2 \xi - (2)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (2)} \right\} - \sum (1) \left\{ \varphi_2 \xi - (2)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (2)} \right\} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (1)},$$

ovvero, come si scorge dopo facile osservazione

$$\xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \xi - (1)_\xi \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} - (2)_\xi \left[\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial (2)} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} \right] \tag{3}$$

2° La sostituzione $R_3 R_2 R_1$ è data dalle formule

$$\begin{aligned} \xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \left\{ \varphi_3 \xi - (3)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (3)} \right\} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} \sum (1) \left\{ \varphi_3 \xi - (3)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (3)} \right\} + \\ - \left[\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial (2)} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} \right] \sum (2) \left\{ \varphi_3 \xi - (3)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (3)} \right\}, \end{aligned}$$

ovvero, dopo gli sviluppi e delle osservazioni analoghe alle precedenti

$$\begin{aligned} \xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - (1)_\xi \varphi_2 \varphi_3 \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} - (2)_\xi \varphi_3 \left[\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial (2)} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} \right] + \\ - (3)_\xi \left\{ \varphi_1 \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial (3)} - \varphi_2 \varphi_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} - \varphi_{23} \left[\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial (2)} - \varphi_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial (1)} \right] \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

3° La sostituzione $R_4 R_3 R_2 R_1$ è data da un gruppo di formule che si stabiliscono in una maniera analoga, e che noi, per brevità, sopprimiamo. Però, dall'esame di queste formule e delle precedenti (3), (4) ci è facile di risalire ad una legge generale per la formazione delle formule corrispondenti alla sostituzione $R_m R_{m-1} \dots R_2 R_1$, quale che sia il numero m. Infatti, è dapprima evidente che queste ultime formule hanno la forma che segue

$$\xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_m \xi - (1)_\xi A_1 - (2)_\xi A_2 - \dots - (m)_\xi A_m \tag{5}$$

e si tratta perciò di esaminare il modo di formazione dei coefficienti $A_1, A_2, \dots, A_m$. Io dico che, se, in una maniera generale, noi indichiamo con $|h, l|$ il coefficiente di $(l)_\xi$ nella sostituzione di tipo (5) relativa alla $R_h R_{h-1} \dots R_2 R_1$ (cioè nella i^{ma} delle formule corrispondenti a questa sostituzione), abbiamo le relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} & |h, 1| = \varphi_h |h-1, 1|, |h, 2| = \varphi_h |h-1, 2|, \dots, |h, h-1| = \varphi_h |h-1, h-1| \\ & |h, h| = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} - \varphi_{1h} |h-1, 1| - \varphi_{2h} |h-1, 2| - \dots - \varphi_{h-1,h} |h-1, h-1| \end{aligned} \right. ; \tag{6}$$

perchè, scritte le formule corrispondenti alla $R_{h-1} R_{h-2} \dots R_2 R_1$ col sistema di coefficienti ora convenuto, cioè le

$$\xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \xi - \sum_{l=1}^{l=h-1} [(l)_\xi |h-1, l|,$$

avremo, per formule corrispondenti alla $R_h\, R_{h-1} \dots R_2\, R_1$ le

$$\xi' \equiv \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \left\{ \varphi_h \xi - (h)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} \right\} - \sum_{l=1}^{l=h-1} |h-1, l| \sum (l) \left\{ \varphi_h\, \xi - (h)_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} \right\},$$

il secondo sommatorio dovendo essere esteso ai valori da 1 ad $n+1$ dell' indice i soppresso. Ora, queste ultime formule si riducono evidentemente alle altre:

$$\xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_h \xi - (h)_\xi \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} - \sum_{l=1}^{l=h-1} |h-1, l|\, \varphi_h (l)_\xi + (h)_\xi \sum_{l=1}^{l=h-1} |h-1, l| \sum (l) \frac{\partial \varphi}{\partial (h)},$$

ovvero:

$$\xi' \equiv \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_h \xi - \sum_{l=1}^{l=h-1} (l)_\xi \varphi_h |h-1, l| - (h)_\xi \left\{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} - \sum_{l=1}^{l=h-1} \varphi_{lh} |h-1, l| \right\};$$

e dal confronto di queste con le supposte

$$\xi \equiv \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_h \xi - (1)_\xi |h, 1| - (2)_\xi |h, 2| - \dots - (h)_\xi |h, h| \tag{7}$$

si ricava la verità dell' asserto.

3. Le relazioni (6) sono ricorrenti. Dalle prime $h-1$ di esse, reiteratamente applicate, si ricavano, evidentemente, le altre

$$\tag{8} \left\{ \begin{array}{l} |h, 1| = \varphi_h |h-1, 1| = \varphi_h\, \varphi_{h-1} |h-2, 1| = \dots = \varphi_h\, \varphi_{h-1} \dots \varphi_2 |1, 1| \\ |h, 2| = \varphi_h |h-1, 2| = \dots = \varphi_h\, \varphi_{h-1} \dots \varphi_3 |2, 2| \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |h, h-2| = \varphi_h |h-1, h-2| = \varphi_h\, \varphi_{h-1} |h-2, h-2| \\ |h, h-1| = \varphi_h |h-1, h-1| \end{array} \right.$$

per cui l' ultima, dopo un conveniente scambio di h in $h-1$, diventa

$$|h, h| = \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} - \varphi_{1h}\, \varphi_{h-1} \dots \varphi_2 |1, 1| +$$
$$- \varphi_{2h}\, \varphi_{h-1} \dots \varphi_3 |2, 2| - \dots - \varphi_{h-2,h}\, \varphi_{h-1} |h-2, h-2| - \varphi_{h-1,h} |h-1, h-1|;$$

ed in una maniera più concisa:

$$|h, h| = \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{h-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (h)} - \sum_{l=1}^{l=h-1} \varphi_{lh}\, \varphi_{h-2}\, \varphi_{h-1} \dots \varphi_{l+1} |l, l| \tag{9}$$

Questa e le precedenti relazioni (8) mostrano che la costruzione dei diversi coefficienti dei termini in $(1)_\xi, (2)_\xi, \dots, (h)_\xi$ delle formule (7) dipende dalla costruzione delle espressioni

$$|1, 1|, |2, 2|, \dots, |h-1, h-1|, |h, h|,$$

ed una qualunque di queste dipende dalle precedenti nel modo indicato dalla (9). In una maniera generale noi possiamo dunque scrivere un coefficiente $|m\,,r|$ di posto qualunque nella i^{ma} delle formule corrispondenti alla sostituzione $R_m\, R_{m-1} \dots R_2\, R_1$, nella forma seguente

$$(10)\; |m\,,r| = \varphi_m\, \varphi_{m-1} \cdots \varphi_{r+1} \left\{ \varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_{r-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (r)} - \sum_{s=1}^{s=r-1} \varphi_{sr}\, \varphi_{r-1}\, \varphi_{r-2} \cdots \varphi_{s+1} |s\,,s| \right\};$$

dove r può prendere i valori $1\,,2\,,\dots,m$.

Ne segue, ristabilendo gli indici i, e rimettendo $u^{(h)}$ al posto di (h), che le formole della sostituzione $R_m\, R_{m-1} \dots R_2\, R_1$ possono essere scritte così:

$$\xi_i' \equiv \varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_m\, \xi_i +$$
$$- \sum_{h=1}^{h=m} \overset{(h)}{u_\xi}\, \varphi_m\, \varphi_{m-1} \cdots \varphi_{h+1} \left\{ \varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_{h-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i^{(h)}} - \sum_{r=1}^{r=h-1} \varphi_{rh}\, \varphi_{h-1}\, \varphi_{h-2} \cdots \varphi_{r+1} |r\,,r|_i \right\},$$
$$(i = 1\,,2\,,\dots,n+1)$$

ovvero, spezzando in 2 il 1° sommatorio (il che ci permetterà di fare un'osservazione importante) in quest'altra maniera:

$$(11)\; \left\{ \begin{aligned} &\xi_i' \equiv \varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_m\, \xi_i - \sum_{h=1}^{h=m} \overset{(h)}{u_\xi}\, \varphi_1 \cdots \varphi_{h-1}\, \varphi_{h+1} \cdots \varphi_m \frac{\partial \varphi}{\partial u_i^{(h)}} + \\ &+ \sum_{h=1}^{h=m} \overset{(h)}{u_\xi}\, \varphi_m\, \varphi_{m-1} \cdots \varphi_{h+1} \sum_{r=1}^{r=h-1} \varphi_{rh}\, \varphi_{h-1}\, \varphi_{h-2} \cdots \varphi_{r+1} |r\,,r|_i \\ &\qquad (i = 1\,,2\,,\dots,n+1), \end{aligned} \right.$$

o ancora, visto che è $\varphi_g \neq 0$ $(g = 1\,,2\,,\dots,m)$,

$$(12)\; \left\{ \begin{aligned} &\xi_i' \equiv \xi_i - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\overset{(h)}{u_\xi}}{\varphi_h} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i^{(h)}} + \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\overset{(h)}{u_\xi}}{\varphi_h\, \varphi_{h-1} \cdots \varphi_1} \sum_{r=1}^{h=m} \varphi_{rh}\, \varphi_{h-1} \cdots \varphi_{r+1} |r\,,r|_i \\ &\qquad (i = 1\,,2\,,\dots,n+1) \end{aligned} \right.$$

o, finalmente

$$(13)\; \xi_i' \equiv \xi_i - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\overset{(h)}{u_\xi}}{\varphi_h} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i^{(h)}} + \sum_{h=1}^{h=m} \overset{(h)}{u_\xi} \sum_{r=1}^{r=h-1} \frac{\varphi_{rh}}{\varphi_h} \cdot \frac{|r\,,r|_i}{\varphi_1 \cdots \varphi_r} \quad (i = 1\,,2\,,\dots,n+1)$$

Da queste segue poi senz'altro che, essendo $R_1\, R_2 \dots R_m$ la sostituzione inversa della $R_m\, R_{m-1} \dots R_2\, R_1$, le formule corrispondenti a siffatta sostituzione, cioè le formule inverse delle (13), sono

$$(14)\; \xi_i \equiv \xi'_i - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\overset{(h)}{u_{\xi'}}}{\varphi_h} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i^{(h)}} + \sum_{h=1}^{h=m} \overset{(h)}{u_{\xi'}} \sum_{r=1}^{r=m-h} \frac{\varphi_{r,m-h+1}}{\varphi_{m-h+1}} \frac{|r\,,r|_i}{\varphi_1 \cdots \varphi_r} \quad (i = 1\,,\dots,n+1);$$

e più generalmente, detta $\tau_1\, \tau_2 \dots \tau_m$ una permutazione dei numeri $12 \dots m$, saranno

$$(15)\; \xi'_i \equiv \xi_i - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\overset{h)}{u_\xi}}{\varphi_h} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i^{(h)}} + \sum_{h=1}^{h=m} u_\xi^{(\tau_h)} \sum_{r=1}^{r=h-1} \frac{\varphi_{\tau_1, \tau_h}}{\varphi_h} \frac{|\tau_r\,, \tau_r|_i}{\varphi_{\tau_1} \cdots \varphi_{\tau_r}} \quad (i = 1\,,2,\dots,n+1)$$

le formule della sostituzio $R_{\tau_m} R_{\tau_{m-1}} \dots R_{\tau_n} R_{\tau_1}$, nell'intesa che i simboli $|\tau_r, \tau_r|$ si comportino precisamente come i simboli analoghi fatti coi soli indici, sicchè sia p. es. $|\tau_1, \tau_1| = \dfrac{\partial\varphi}{\partial(\tau_1)}$.

4. Dalle (15) si scorge che, mentre il 1° sommatorio al 2° membro è un'espressione simmetrica rispetto alle φ, tale non è il 2°; ciò vuol dire che, *condizione necessaria e sufficiente affinchè le* $R_1, R_2, \dots, R_m$ *diano luogo ad una sola trasformazione risultante, in qualunque modo vengano composte, è che si abbia*, visto che possiamo riferirci ai soli indici dei numeri τ,

$$\sum_{h=1}^{h=m} u_\xi^{(h)} \sum_{r=1}^{r=h-1} \frac{\varphi_{rh}}{\varphi_h} \frac{|r, r|_i}{\varphi_1 \dots \varphi_r} = 0 \tag{16}$$

per $i = 1, 2, \dots, n+1$. Ma ciò deve aver luogo indipendentemente dalle $u_\xi^{(h)}$ perciò le condizioni precedenti valgono le seguenti

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{12}\,|1, 1|_i = 0 \\ \varphi_2\varphi_3\dots\varphi_{h-1}\varphi_{1h}|1,1|_i + \varphi_3\dots\varphi_{h-2}\varphi_{2h}|2,2|_i + \dots + \varphi_{m-1,m}|h-1, h-1|_i = 0 \end{array}\right\} (h=3,4,..,m);$$

e queste a loro volta, come si può facilmente mostrare, valgono le altre

$$\varphi_{r,r+s} = 0 \left\{\begin{array}{l} r, s = 1, 2, \dots, m-1 \\ r + s \leq m \end{array}\right. \tag{17}$$

Non ci fermeremo a mostrare la verità di quest'ultima affermazione, perchè ne discorriamo anche nella cit. Mem.; però rileviamo subito che le condizioni (17) esprimono *essere i centri* $P_1, \dots P_m$ *delle* m *proiezioni, coniugati 2 a 2 rispetto a* $\varphi = 0$, *cioè essere i punti* $P_1, \dots, P_m$ *vertici di una piramide auto-polare rispetto a* $\varphi = 0$. Ora, una siffatta piramide non esiste che per $m \leq n + 1$.

Rileviamo inoltre che *le formule*

$$\left\{\begin{array}{l} \xi'_i \equiv \xi_i - \displaystyle\sum_{h=1}^{h=m} \frac{u_\xi^{(h)}}{\varphi_h} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i^{(h)}} \\ (i = 1, 2, \dots, n+1) \end{array}\right. \tag{18}$$

abbracciano tutte le omografie involontarie i cui spazi fondamentali sono polari rispetto alla varietà quadratica φ, quando si faccia che m abbia i valori da 1 ad $\dfrac{n+1}{2}$ se n è dispari, e da 1 ad $\dfrac{n}{2} + 1$ se n è pari. E precisamente, *le* (18) *rappresentano un'omografia involutoria i cui spazi fondamentali sono l'* S_{m-1} *dei punti* $P_1, \dots, P_m$ *e l'* S_{n-m} *determinato dagli iperpiani* $\pi_1, \dots, \pi_m$ [1].

[1] Non verificandosi tutte o qualcuna, delle condizioni (17) si può osservare che per $m < n$ le (13) rappresentano un'omografia che ha due spazî di punti uniti, l'uno ad $m-1$ dimensioni, e l'altro ad $n-m$ dimensioni, polari rispetto a $\varphi = 0$.

5. Per vedere in che senso le formole precedenti possano convenire a rappresentare le trasformazioni del *gruppo dei raggi reciproci* in qualsiasi spazio, basta prendere φ nella forma seguente

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{n-1}^2 - 4\, u_n\, u_{n+1}\,; \tag{19}$$

poichè, allora a parte un fattore numerico, si avrà per la forma reciproca

$$\Phi_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n\, x_{n+1} \tag{20}$$

ed allorchè questa si annulla le $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ sono coordinate *cartesiane omogenee* del punto a cui si riduce la varietà sferica di equazione [nelle y_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ considerate come coord. cart. in un S_{n-1}],

$$x_{n+1} \cdot \sum_1^{n-1} y_{n-1}^2 + 2 \sum_1^{n-1} x_i\, y_i + x_n = 0\,,$$

quando il suo raggio $\sqrt{\Phi_{xx}} : x_{n-1}$ si annulla. Ora, l'annullarsi della (20) dice che $\varphi = 0$ è una varietà quadratica [tangente all'S_{n-1} all'infinito nell'S_n supposto euclideo (*paraboloide* per $n = 3$)]; dunque, *le formule* (14), o le altre ad esse equivalenti, *dànno nel medesimo tempo il gruppo delle trasformazioni che provengono dalle omologie armoniche commutabili col sistema polare rispetto ad una quadrica in uno spazio ad n dimensioni, ed il gruppo delle trasformazioni che provengono dalle inversioni in uno spazio ad n* — 1 *dimensioni;* cioè *la geometria che ha per base il gruppo delle omologie armoniche commutabili con un sistema polare, non nullo, in un certo spazio* È IDENTICA *alla geometria che ha per base il gruppo delle inversioni in uno spazio ad un numero di dimensioni di una unità inferiore* (¹). Questa proposizione che credo sia stata per la prima volta enunciata da Klein in forma alquanto diversa, si presenta qui in una forma analoga a quella con cui analiticamente si presenta il *principio di dualità* in qualsiasi spazio, giacchè è uno stesso sistema di formule che fornisce i 2 gruppi. Del resto, al fatto importantissimo (non sfuggito ad altri, ma sul quale è sempre bene di tornare) che l'*identità* fra diverse quistioni geometriche (ciò che si presenta spessissimo) possa essere dedotta dalla lettura *in più modi* di uno stesso sistema di formule, io ho fatto cenno anche nelle mie *Lezioni di geom. proiett. ed analitica*, stampate a Modena, pei tipi della Società tipografica.

(¹) Questo enunciato mostra essere inesatta la proposizione che il prof. Loria riporta dal Mannheim in piè della pag. 251 del suo libro: *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, cioè che *il prodotto di quante si vogliano inversioni è un'inversione*; ma siffatta inesattezza risulta in modo evidente dal fatto che, in generale, A, B essendo operazioni involutorie (o non) è $AB \neq BA$. Del resto, si sa, limitandosi p. es. alle trasformazioni nel piano, che *la successione di* 2 (generalmente di un numero pari) *trasformazioni per raggi vettori reciproci non altera il verso delle figure.*