ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 dicembre 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine.* Nota del Socio U. Dini.

1. Si abbia un campo C a due variabili x e y, col contorno fisso, o in parte fisso e in parte variabile, e siano X, Y funzioni regolari in C, secondo le denominazioni del prof. L. Bianchi; cioè funzioni finite e continue o almeno atte alla integrazione e a un sol valore esse e le loro derivate in tutto C almeno fino a quell'ordine che avremo bisogno di considerare. Come è noto, e come si trova subito, avremo la formola:

$$(1) \qquad \iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int \left(X \frac{\partial x}{\partial p} + Y \frac{\partial y}{\partial p}\right) ds,$$

l'integrale del 1° membro essendo esteso a C, e quello del 2° al suo contorno s, e p indicando la normale interna al contorno.

Mutando X in U V, e Y in $U_1 V_1$ avremo:

$$\iint \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + U_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + V \frac{\partial U}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int \left(UV \frac{\partial x}{\partial p} + U_1 V_1 \frac{\partial y}{\partial p}\right) ds,$$

e mutando ancora in questa:

$$U \text{ in } \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma U + \delta, \quad U_1 \text{ in } \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} + \gamma_1 U_1 + \delta_1,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ funzioni qualsiasi regolari delle variabili x, y, e anche, se

vuolsi, di una o più funzioni $\theta_1, \theta_2 \ldots$ e delle loro derivate $\frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \frac{\partial \theta_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \ldots$ dotate esse pure delle solite proprietà di essere regolari in campi relativi alle quantità $x, y, \theta_1, \theta_2 \ldots \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \ldots$ considerate come se fossero altrettante variabili indipendenti, avremo la formola:

$$(2)\quad \iint \Big[\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial V_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma U V)}{\partial x} +$$
$$+ \frac{\partial(\gamma_1 U_1 V_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta V)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta_1 V_1)}{\partial y} + V\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + V_1 \beta_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + V\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} +$$
$$+ V_1 \alpha_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + V \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + V_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial y}\frac{\partial U_1}{\partial y} + V \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + V_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\frac{\partial U_1}{\partial x} \Big] dx\, dy =$$
$$= -\int \Big[\Big(\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma U + \delta \Big) V \frac{\partial x}{\partial p} + \Big(\alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} +$$
$$+ \gamma_1 U_1 + \delta_1 \Big) U \frac{\partial y}{\partial p} \Big] ds,$$

dove le derivate di $\alpha, \beta, \ldots$ s'intende che siano calcolate colle regole delle funzioni composte, considerandovi $\theta_1, \theta_2 \ldots \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \ldots$ come funzioni di x e y; e quando si cangino fra loro U e V, e così pure fra loro U_1 e V_1 si ha un'altra formola simile che sottratta da questa dà la seguente:

$$(3)\quad \iint \Big[\beta \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} \Big) + \alpha_1 \Big(\frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial V_1}{\partial x} \Big) - \frac{\partial \{\delta(U-V)\}}{\partial x} -$$
$$- \frac{\partial \{\delta_1(U_1 - V_1)\}}{\partial y} + V\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + V_1 \beta_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - U\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - U_1 \beta_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} +$$
$$+ V\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + V_1 \alpha_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} - U\beta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - U_1 \alpha_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\Big(V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x} \Big) +$$
$$+ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\Big(V_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} \Big) + \frac{\partial \beta}{\partial x}\Big(V \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y} \Big) +$$
$$+ \frac{\partial \beta_1}{\partial y}\Big(V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} - U_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \Big) \Big] dx\, dy = -\int \Big[\alpha \Big(V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x} \Big) \frac{\partial x}{\partial p} +$$
$$+ \beta \Big(V \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y} \Big) \frac{\partial x}{\partial p} + \delta(V - U) \frac{\partial x}{\partial p} + \alpha_1 \Big(V_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} \Big) \frac{\partial y}{\partial p} +$$
$$+ \beta_1 \Big(V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} - U_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \Big) \frac{\partial y}{\partial p} + \delta_1 (V_1 - U_1) \frac{\partial y}{\partial p} \Big] ds.$$

2. Queste formole (2) e (3) (che potrebbero estendersi anche al caso di più di due variabili) quando si particolarizzino le $\alpha, \beta \ldots$ e si stabiliscano relazioni speciali fra le U, V, U_1, V_1, danno luogo ad altre, che applicate

allo studio delle equazioni a derivate parziali del 2° ordine conducono a risultati, alcuni dei quali naturalmente sono noti, ma dal cui insieme apparisce che certe particolarità date finora soltanto per equazioni speciali si applicano in casi differenti e ben più estesi. Alcuni di questi risultati, che non sono forse i più importanti, ma dai quali giova incominciare per l'ordine da dare a queste ricerche, vengono esposti in questa Nota.

Si supponga dapprima che nella (2) le quattro funzioni U, V, U_1, V_1 siano tutte eguali fra loro e ad U. Avremo la formola:

$$(4)\quad \iint \Big[\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + (\alpha_1+\beta)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \beta_1\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \delta\frac{\partial U}{\partial x} + \delta_1\frac{\partial U}{\partial y} +$$
$$+\Big\{\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\alpha_1+\beta)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \beta_1\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} + 2\gamma\right)\frac{\partial U}{\partial x} +$$
$$+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta_1}{\partial x} + 2\gamma_1\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_1}{\partial y}\right)U + \frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{\partial\delta_1}{\partial y}\Big\}U\Big]\,dx\,dy =$$
$$= -\int\Big[\alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma U + \delta\Big)\frac{\partial x}{\partial p} + \left(\alpha_1\frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma_1 U + \delta_1\right)\frac{\partial y}{\partial p}\Big]U\,ds,$$

che varrà per qualunque funzione U regolare entro C, e con $\alpha, \alpha_1, \beta \ldots$ funzioni esse pure regolari che noi particolarizzeremo in varî modi.

Così cambiando α in $V\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$, α_1, e β in $-V\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}$, β_1 in $V\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ con V e θ funzioni regolari nel solito campo, e supponendo $\gamma = \gamma_1 = \delta = \delta_1 = 0$ avremo la formola:

$$(5)\quad \iint\Big[V\Big\{\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\Big\} + UV\Big(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} -$$
$$-2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big) + U\Big\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\right) +$$
$$+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Big\}\Big]\,dx\,dy = -\int\Big[\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p} +$$
$$+\left(-\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\Big]UV\,ds,$$

che vale qualunque siano le funzioni U, V, θ purchè regolari in C; e da questa prendendo una volta $V = 1$, e un'altra $V = U$, avremo le formole:

$$(6)\quad \iint\Big[\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + U\Big(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} -$$
$$-2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big)\Big]\,dx\,dy = -\int\Big[\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p} +$$
$$+\left(-\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\Big]U\,ds;$$

$$(7)\quad \iint U^2\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)dx\,dy+2\iint U\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=-\int\left[\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^3}\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right]U^2\,ds\,,$$

delle quali ci varremo anche più oltre.

3. Valendosi della formola (4) anche col cambiarvi α in $a+h\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, α_1 e β in $b-h\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$, e β_1 in $c+h\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, con a, b, c, h funzioni regolari in C, e supponendo $\delta=\delta_1=0$ troveremo l'altra:

$$(8)\quad \iint\left[\left(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+2\left(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\left(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$+\left\{a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\,b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2\,h\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+2\,\gamma\right)\frac{\partial U}{\partial x}+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\,\gamma_1\right)\frac{\partial U}{\partial y}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}\right)U\right\}U\Bigg]dx\,dy=$$

$$=-\int\left[\left\{\left(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\frac{\partial U}{\partial x}+\left(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma\,U\right\}\frac{\partial x}{\partial p}+\right.$$

$$\left.+\left\{\left(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}+\left(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\gamma_1 U\right\}\frac{\partial y}{\partial p}\right]U\,ds\,;$$

e se, indicando con m e n altre funzioni indeterminate ma regolari esse pure entro C, poniamo:

$$(9)\quad \begin{cases} 2\,\gamma=-\dfrac{\partial a}{\partial x}-\dfrac{\partial b}{\partial y}-\dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+2\,m\,, \\ 2\,\gamma_1=-\dfrac{\partial b}{\partial x}-\dfrac{\partial c}{\partial y}+\dfrac{\partial h}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\,n\,, \end{cases}$$

e supponiamo inoltre che U sia un'integrale regolare entro C della equazione a derivate parziali del 2° ordine:

$$(10)\quad a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\,b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2\,h\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}+l=0\,,$$

ove anche l lo supporremo ora, come a, b, c, h, m, n, funzione regolare di $x, y, U, \dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \ldots$, la precedente darà luogo all'altra:

$$(11)\quad \iint \Big[\Big(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+2\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\Big(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)^2-$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-$$
$$-2\frac{\partial m}{\partial x}-2\frac{\partial n}{\partial y}\Big)U^2+2\,m\,U\frac{\partial U}{\partial x}+2\,n\,U\frac{\partial U}{\partial y}-l\,U\Big]\,dx\,dy=$$
$$=-\int\Big[\Big\{\Big(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}+\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma U\Big\}\frac{\partial x}{\partial p}+$$
$$+\Big\{\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}+\Big(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma_1 U\Big\}\frac{\partial y}{\partial p}\Big]U\,ds,$$

ove nel secondo membro γ e γ_1 si intendono determinate dalle (9); e da questa, valendosi della formola che si ha dalla (7) col farvi $\theta = h$, otterremo subito la formola seguente:

$$(12)\quad \iint \Big[\Big(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+U\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+2\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-U\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+$$
$$+\Big(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+U\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)^2-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-2\frac{\partial m}{\partial x}-$$
$$-2\frac{\partial n}{\partial y}\Big)U^2+2\,m\,U\frac{\partial U}{\partial x}+2\,n\,U\frac{\partial U}{\partial y}-lU\Big]\,\partial x\,\partial y=-\int L\,U\,ds$$

dove:

$$(13)\quad L=\Big\{\Big(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\tfrac{1}{2}U\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}+\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-\tfrac{1}{2}U\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-2\,m\Big)U\Big\}\frac{\partial x}{\partial p}+\Big\{\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-$$
$$-\tfrac{1}{2}U\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}+\Big(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}U\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}-$$
$$-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\,n\Big)U\Big\}\frac{\partial y}{\partial p};$$

e quando la funzione l che figura nella (10) sia tale che valendosi delle formole precedenti o con altre trasformazioni opportune si possa scrivere:

$$(14)\quad \iint l\,U\,dx\,dy=\iint\Big(l_1\,U^2+l_2\,U\Big)\,dx\,dy-\int\Big(L_1\frac{\partial x}{\partial p}+L_2\frac{\partial y}{\partial p}\Big)U\,ds,$$

la formola precedente diverrà:

$$(15)\quad \iint \Big[\Big(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+U\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+2\Big(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-U\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+$$
$$+\Big(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+U\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)^2-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-2\frac{\partial m}{\partial x}-$$
$$-2\frac{\partial n}{\partial y}+2\,l_1\Big)U^2+2\,m\,U\frac{\partial U}{\partial x}+2\,n\,U\frac{\partial U}{\partial y}-l_2\,U\Big]\,dx\,dy=-\int\overline{L}\,U\,ds,$$

dove $\overline{L} = L + L_1 \frac{\partial x}{\partial p} + L_2 \frac{\partial y}{\partial p}$; e così in particolare quando la equazione data (10) abbia la forma seguente:

$$(16)\ a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\, h \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \right)^2 \right\} + 2\, d \frac{\partial U}{\partial x} + \\ + 2\, e \frac{\partial U}{\partial y} + g\, U = g_0,$$

dove le a, b, c, h, d, e, g, g_0 sono al solito funzioni regolari di $x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots,$

siccome allora si ha $l = 2\, d \frac{\partial U}{\partial x} + 2\, e \frac{\partial U}{\partial y} + g\, U - g_0$, e quindi:

$$\iint l U dx\, dy = -\int \left(d \frac{\partial x}{\partial p} + e \frac{\partial y}{\partial p} \right) U^2 ds - \iint \left[\left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - g \right) U^2 + g_0 U \right] dx\, dy$$

potremo porre nelle (15) $l_1 = -\frac{\partial d}{dx} - \frac{\partial e}{\partial y} + g$, $l_2 = -g_0$, $L_1 = dU$, $L_2 = eU$.

E così se nel campo C (il contorno inclusivo) sì U che le altre funzioni $a, b, c, \ldots$ sono regolari e sul contorno si ha $U = 0$, allora nel caso della equazione (10) avremo dalla (15):

$$(17) \iint \left[\left(a + h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(b - h \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - U \frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ + \left(c + h \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial m}{\partial n} - \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\partial n}{\partial y} + 2\, l_1 \right) U^2 + 2\, m\, U \frac{\partial U}{\partial x} + 2\, n\, U \frac{\partial U}{\partial y} - l_2\, U \right] dx\, dy = 0,$$

e nel caso della equazione (16) avremo questa stessa equazione (17) nella quale sia fatto:

$$l_1 = -\frac{\partial d}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y} + g, \quad l_2 = -g_0,$$

talchè si può evidentemente asserire che « se in un campo C le funzioni « $U, a, b, c \ldots$ sono regolari, e U è un integrale delle equazioni (10) o (16) « che sul contorno di C è sempre zero, la quantità:

$$(18)\ H = \left(a + h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(b - h \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - U \frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \\ + \left(c + h \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial m}{\partial x} - 2 \frac{\partial n}{\partial y} + 2\, l_1 \right) U^2 + 2 m\, U \frac{\partial U}{\partial x} + 2 n\, U \frac{\partial U}{\partial y} - l_2\, U$$

« nel caso della equazione (10), o l' altra che si ha da questa col farvi:

$$(19) \qquad l_1 = -\frac{\partial d}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y} + g, \quad l_2 = -g_0$$

« nel caso della equazione (16), non potranno dove sono diverse da zero entro C « avere sempre lo stesso segno »; e quindi « se le particolarità delle equazioni « stesse (10) e (16) portassero che dove le quantità U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ fossero di- « verse da zero le quantità stesse H avessero un medesimo segno si dovrà « concludere che dall'essere $U = 0$ sul contorno di C ne verrà che U sia « zero in tutto C ». Ciò sempre bene inteso quando U e le altre funzioni a, b, c, ... debbano essere regolari in tutti i punti di C (incl. il contorno).

4. E così evidentemente si può senz' altro affermare che se una equazione a derivate parziali del 2° ordine:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{20}$$

dove p, q, r, s, t, secondo le notazioni di Monge, indicano appunto le derivate della funzione z di x e y, è tale che indicando con z_1 e z_2 due suoi integrali, la loro differenza $U = z_1 - z_2$ è un integrale di una equazione (10) o (16) per la quale le quantità H vengano a soddisfare alle condizioni precedenti entro C, allora « gli integrali z della equazione stessa (20) saranno perfetta- « mente determinati in tutto il campo C quando siano dati i loro valori al « contorno, e in tutto C (il contorno incluso) tanto gli integrali quanto le varie « funzioni che compariscono nella equazione data debbano essere regolari ». « E se queste particolarità non si verificheranno che in porzioni speciali del « piano (x, y), il teorema varrà soltanto pei campi C che cadono in queste « porzioni di piano ».

5. Questi risultati, che appariscono ora sotto una forma molto complicata a causa della complicazione che si ha nelle espressioni di H, danno luogo a conseguenze semplici e notevolissime.

Si osservi per questo dapprima che quando le quantità H dove fossero diverse da zero presentassero la particolarità di avere sempre lo stesso segno, si può senza limitare la generalità supporre che siano positive, perchè ove non lo fossero basterebbe cambiare il segno di tutta la equazione data (10) o (16); e si osservi inoltre che quando questa equazione abbia il termine in $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, limitandosi a quei campi C nei quali il coefficiente h di questo termine non è mai zero, si potrà sempre, quando si voglia, supporre di averlo ridotto al caso di $h = \pm 1$, bastando per questo dividere la equazione per h, o per $-h$ secondochè h in C sarà positiva o negativa; ma noi qui, non volendo possibilmente introdurre pel campo C la limitazione ora indicata, cioè quella di dovere richiedere che in C non sia mai $h = 0$, non ci varremo di questa osservazione altrochè quando ciò sia necessario per certe semplificazioni che occorresse fare nelle formole, o quando il campo C sia già dato e si sappia che in esso h è diverso da zero.

Ciò posto, incominciamo dall'osservare che nei valori di H figura una forma di 2° grado in $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}$, quella cioè formata dai primi tre termini; ma nei casi particolari altri termini simili potranno aversi anche dalle altre parti di H e questi potranno riunirsi ai primi. Così facendo, ove ne sia il caso, si vede che i valori di H potranno essere inclusi nella espressione unica:

$$(21)\qquad \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\lambda_1 + \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y}\right)U^2 + \\ + 2m\,U\frac{\partial U}{\partial x} + 2n\,U\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda_2\,U\,,$$

dove le $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \lambda_2$ sono quantità che dipendono dalla equazione data, e m e n sono ancora quantità indeterminate delle quali potremo disporre nel modo che più ci tornerà comodo, ma sempre però procurando che si mantengano regolari in tutto C.

Fermandoci ora in modo speciale sulla forma:

$$(22)\qquad \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

consideriamo il caso in cui il determinante $\lambda\nu - \mu^2$ di questa forma non è mai negativo in tutto C, senza però che si abbia mai $\lambda = \mu = 0$ che porterebbe anche $\mu = 0$.

In questo caso la (22) potrà porsi sotto la forma:

$$(23)\qquad \left(A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(A_1\frac{\partial U}{\partial x} + B_1\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

dove alcune delle A, B, A_1, B_1, possono anche essere zero, e propriamente dovendosi prendere

$$(24)\qquad \begin{cases} A = \sqrt{\lambda}\,\text{sen}\,\varphi\,, & B = \sqrt{\nu}\,\text{sen}\,\theta \\ A_1 = \sqrt{\lambda}\,\cos\varphi\,, & B_1 = \sqrt{\nu}\,\cos\theta \end{cases}$$

con φ e θ legate dalla relazione $\sqrt{\lambda\nu}\cos(\varphi - 0) = \mu$, per modo che una di queste quantità φ e θ resta arbitraria; e ciò supposto, come può sempre intendersi nel caso attuale, che λ e ν non siano negativi; e nel caso che una delle due quantità λ e ν p. es. ν sia sempre zero in C, con che anche $\mu = 0$, allora, intendendo che B e B_1 siano zero senz'altro, non figurerà più nelle nostre formole il θ, e il φ resterà arbitrario.

Ma la (23) può scriversi così:

$$\left(A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} + CU\right)^2 + \left(A_1\frac{\partial U}{\partial x} + B_1\frac{\partial U}{\partial y} + C_1U\right)^2 - (C^2 + C_1^2)\,U^2 - \\ -2(AC + A_1C_1)U\frac{\partial U}{\partial x} - 2(BC + B_1C_1)\,U\frac{\partial U}{\partial y}\,,$$

quindi evidentemente se determiniamo m colle formole:

$$(25) \qquad m = AC + A_1 C_1 , \qquad n = BC + B_1 C_1 ,$$

i valori (21) di H prenderanno la forma seguente:

$$(26) \qquad \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + CU\right)^2 + \left(A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + B_1 \frac{\partial U}{\partial y} + C_1 U\right)^2 + \\ + \left(\lambda_1 + \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} - C^2 - C_1^2\right) U^2 + \lambda_2 U ,$$

nella quale C e C_1 sono arbitrari, come lo è ancora una delle due funzioni φ e θ.

Ma, profittando ora delle arbitrarietà che abbiamo in queste funzioni, si vede subito che se s' indica con τ una quantità, costante o variabile, ma regolare, e sempre diversa da zero in tutti i punti interni a C, allora prese arbitrariamente due delle quantità C, C_1, φ, θ si potranno determinare le altre due in modo che il coefficiente di U^2 in H sia eguale a τ^2 (¹); e quindi evidentemente si può ora affermare che le quantità H saranno diverse da zero e positive in tutto C, a meno che non sia sempre $U = 0$, se il termine $\lambda_2 U$ nella espressione (21) di H non sarà mai negativo entro C.

(¹) Considerando ad es. il caso in cui $\lambda\nu - \mu^2$ non è mai zero entro C, con che λ e ν non saranno certamente zero, potremo prendere $\theta = 0$, $C_1 = 0$ con che sarà $\cos\varphi = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda\nu}}$, $m = AC$, $n = 0$ e A non si accosterà a zero più di un certo numero; e quindi determineremo il valore di m e in conseguenza anche quello di C integrando la equazione $\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{1}{A^2} m^2 = \tau^2 - \lambda_1$.

Nè pei nostri teoremi farà difficoltà l'ipotesi ammessa da noi che i coefficienti della equazione data (10) o (16) possano contenere U e le sue derivate; perchè ammesso anche che esistesse una funzione U integrale della equazione stessa che, pure essendo zero sul contorno di C, non fosse zero nell'interno di questo campo e ivi fosse regolare, applicando le formole precedenti a questa funzione speciale U si giungerebbe agli stessi risultati e si cadrebbe in contradizione.

E del resto bastando pei nostri teoremi che nella espressione (21) di H il coefficiente di U^2 sia sempre positivo e discosto da zero per una quantità comunque piccola e positiva ε, per modo cioè che sia $\lambda_1 + \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{1}{A^2} m^2 \geq \varepsilon$, e dovendo entro C la U essere sempre finita insieme alle sue derivate prime e seconde, si vede chiaro che se si indicano con A_0^2 e $\overline{\lambda}_1$ i limiti inferiori dei valori che si hanno per A^2 e per λ_1 entro C per valori qualsiasi di U e delle sue derivate che non superano in valore assoluto quantità comunque grandi ma finite, basterà che si determini m colla equazione $\frac{\partial m}{\partial x} = -\overline{\lambda}_1 + \varepsilon + \frac{1}{A_0^2} m^2$, con che risulterà determinata anche la parte del piano nella quale, restandovi regolare m, potrà esservi preso sempre il campo C.

Se poi si avesse $\lambda\nu - \mu^2 = 0$, senza che fossero $\lambda = \nu = \mu = 0$, questo processo con leggiere modificazioni si applicherebbe ugualmente.

Se poi λ e ν entro C, pur non cambiando segno non fossero mai positivi, allora pel termine in U^2 in H si giungerebbe alle stesse conseguenze sostituendo però $-\tau^2$ a τ^2, e perchè i teoremi continuassero a sussistere bisognerebbe che i termini $\lambda_2 U$ in H non fossero mai positivi entro C.

E così in particolare, intendendo ora che la espressione (21) di H sia appunto la (18), si vede subito che se nel caso della equazione (10) la quantità corrispondente l_2 determinata dalla (14) (che potrà quindi essere anche la stessa l) sarà zero in tutto C, o se, nel caso della equazione (16) sarà zero il g_0, o queste quantità l_2 (o l) e g_0 potranno ridursi zero con opportune trasformazioni, basterà assicurarsi che il determinante della forma (22) corrispondente, cioè di:

$$(27)\quad \left(a + h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2\left(b - h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - U\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \\ + \left(c + h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

è positivo o zero in tutto C, per essere certi che l'essere $U = 0$ sul contorno porta che U sia zero in tutto il campo, tanto nel caso della equazione (10) quanto in quello della equazione (16). E in corrispondenza sussiste il teorema della unicità degli integrali della equazione (20) quando sono dati i valori al contorno.

In questo caso poi di $l_2 = 0$ o $g_0 = 0$ non vi è da occuparsi in modo speciale del segno dei coefficienti di $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ o $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$ nella forma (27), ma basta assicurarsi che questo non cambia mai entro C.

6. Considerando ora in modo speciale la forma ridotta (27), osserviamo che il suo determinante sarà:

$$(28)\quad ac - b^2 + h\left\{a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + h\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)\right\} + \\ + U\left\{a\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + U\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial y}\right)^2\right)\right\} + \\ + hU\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right\},$$

e a seconda dei valori di h che evidentemente, fuori che nel caso in cui $h = 0$ in C, possono variarsi a piacere perchè la equazione data (10) o (16) può intendersi moltiplicata per un fattore finito qualsiasi, avremo per questo determinante diversi valori.

Nel caso particolare di $h = 0$, cioè quando la equazione data manca del termine in $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ questo determinante si riduce a quello $ac - b^2$ dei coefficienti dei primi tre termini della equazione data; fuori di questo

caso, basta avere riguardo alla equazione (10) per vedere ad es. che per h costante o anche per h funzione di primo grado in x e y esso prende la forma

$$ac - b^2 - h\left\{l + h\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)\right\},$$

mentre per $h = \pm U$ esso diviene $ac - b^2 \mp 2\,l\,U$; e si conclude quindi che:

a) nel caso delle equazioni della forma:

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + l = 0\,, \tag{29}$$

che mancano cioè del termine in $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial x\,\partial y}{\partial^2 U}\right)^2$, i soliti teoremi varranno certamente in un campo C nel quale tutte le funzioni sono regolari quando ci si possa in qualche modo assicurare che « nello stesso campo uno « almeno dei coefficienti a e c e le due quantità $ac - b^2$ e $-l_2 U$ non sono « mai negative ».

b) nel caso delle equazioni della forma (10) nelle quali h sia già o venga ridotta ad essere una costante o una funzione di primo grado in x e y, basterà in qualche modo assicurarsi che « entro C una almeno delle quantità

$$a + h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,, \quad \text{o} \quad c + h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

« e le due

$$ac - b^2 - h\left\{l + h\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)\right\}, \quad \text{e} \quad -l_2\,U$$

« non sono mai negative ».

c) nel caso in cui la equazione data (10) sia già o venga ridotta alla forma:

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \pm 2U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) + l = 0\,, \tag{30}$$

basterà che in qualche modo ci si assicuri che « entro C una almeno delle « due quantità

$$a \pm 2\,U\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,, \quad c \pm 2\,U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,,$$

« e le due

$$ac - b^2 \mp 2\,l\,U\,, \quad \text{e} \quad -l_2\,U$$

« non sono mai negative; e nel caso particolare in cui in questa equazione (30) « l e quindi anche l_2 sono nulli, le varie condizioni ora indicate si riducono « a quelle che entro C $ac - b_2$ non sia mai negativa, e che una almeno « delle due quantità $a \pm 2\,U\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $c \pm 2\,U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ non muti mai di segno ».

In tutte queste espressioni poi quando le equazioni che si considerano rientrino nella forma (16) bisognerà fare:

$$l = 2\,d\,\frac{\partial U}{\partial n} + 2\,e\,\frac{\partial U}{\partial y} + g\,U - g_0\,,\quad l_2 = -\,g_0\,;$$

d) e così quando la equazione data abbia la forma (16) e manchi del termine in $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ cioè sia:

$$(31)\quad a\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\,\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\,d\,\frac{\partial U}{\partial x} + 2a\,\frac{\partial U}{\partial x} + gU = g_0\,;$$

« allora le condizioni del caso *a*) si riducono all' essere uno almeno dei coeffi-
« cienti a e c, e le due quantità $ac - b^2$ e $g_0 U$ sempre positive o nulle nel
« campo C ».

e) Invece se la equazione data ha il termine in $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x y\,\partial}\right)^2$, ma manca di quelli in $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, cioè se essa ha la forma:

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial x\,\partial y}{\partial^2 y}\right)^2 + l = 0$$

che corrisponde ad $a = b = c = 0$, $h = \frac{1}{2}$, allora « le condizioni del caso *b*) si
« riducono all'essere una almeno delle derivate $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ o $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, e le due quan-
« tità $-l$, $-l_2 U$, o le due $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, $-l_2 U$ sempre positive
o nulle nel campo C ».

7. Per ognuno di questi casi poi è da osservare che quando non è conosciuto anticipatamente l' integrale U della equazione data al quale questi risultati vogliono applicarsi, l' esame dei segni delle quantità da considerarsi presenterà difficoltà gravissime per la presenza dello stesso integrale U e delle sue derivate; però si comprende che per speciali composizioni dei coefficienti delle equazione data (10) o (16) potrà anche talvolta questo esame farsi semplicemente; e potrà anche darsi che venga semplicizzato dalla natura stessa del problema al quale la equazione data si riferisce.

Così ad es. se questa equazione si riferisce a superficie speciali, la circostanza che il segno del binomio $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ corrisponde precisamente a quella della curvatura della superficie, potrà giovare per l' esame del segno delle quantità che dovremo considerare.

Nel prossimo fascicolo sarà dato il seguito di questo studio.