ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 5 luglio 1896.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.* Nota di TULLIO LEVI-CIVITA, presentata dal Socio CERRUTI.

L' interesse, che a buon diritto si suole accordare ai problemi classici della meccanica analitica, mi conforta ad esporre alcune poche cose relative al moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.

Premetto una parola di commento sul punto di vista, da cui io mi sono posto.

Le equazioni differenziali del moto dipendono, come si sa, da due elementi: la natura del sistema mobile, analiticamente rappresentata da una forma differenziale quadratica, e la natura delle forze che lo sollecitano. La conoscenza del primo di questi elementi, se non basta a caratterizzare una determinata questione dinamica, permette tuttavia di confrontare fra loro più sistemi materiali, dotati di uno stesso grado di libertà e di concluderne la identità (analitica), quando le loro forze vive sieno rappresentate da forme, trasformabili l' una nell' altra. In questo caso le equazioni differenziali del moto dei due sistemi si riconducono evidentemente le une alle altre, mediante una trasformazione di coordinate (lagrangiane) e una conseguente trasformazione delle forze.

In ordine a questo criterio, io ho preso a studiare la forza viva T di un corpo rigido, per stabilirne i caratteri essenziali.

Sarebbe stato oltremodo laborioso il ricorrere per questa indagine agli invarianti della forma differenziale. Ho preferito attenermi al concetto gruppale, appoggiandomi sugli insigni lavori del sig. Lie. Determinai pertanto la natura del gruppo, che trasforma in se stessa la forza viva T ed ho trovato, come era agevolmente prevedibile, gruppi diversi, secondo il comportamento dei momenti principali di inerzia, relativi al punto fisso.

Nel caso in cui i tre momenti sieno tra loro eguali, la struttura del gruppo corrispondente porta senz'altro a concludere che la forma differenziale T dev'essere di curvatura costante positiva, e in fatto un'acconcia scelta di variabili permette di constatarlo direttamente, talchè si può identificare la dinamica di un punto materiale in uno spazio ellittico a quella di un corpo rigido, mobile intorno ad un punto fisso, per cui sieno eguali i momenti principali di inerzia.

Mi permetto ancora di rilevare, quantunque nel presente scritto non ne sia fatto cenno, che, allorquando tutti e tre o due almeno dei momenti di inerzia sono distinti, la espressione di T non è utilmente riducibile a tipo diverso e può invece, come mostrerò in altra occasione, risguardarsi canonica per tutta una categoria di problemi con tre gradi di libertà. Spero allora di poter dar prova, anche dal lato strettamente dinamico, dell'interesse di questo genere di ricerche.

Pel corpo rigido in particolare, se non vien fatto di dedurre dalle considerazioni gruppali conseguenze meccaniche nuove, si mette in luce tuttavia un fatto analitico, che sembrami degno di attenzione; si mostra cioè l'esistenza di potenziali *immaginarii*, per cui (anche quando i momenti di inerzia sono tutti distinti) le equazioni del moto si possono integrare mediante quadrature.

L'Accademia vorrà consentire che io dedichi due Note a queste osservazioni sul moto dei corpi rigidi.

1. Sia $T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s$ l'espressione in coordinate lagrangiane della forza viva di un sistema materiale S a legami indipendenti dal tempo; le a_{rs} dovendosi ritenere in tale ipotesi funzioni soltanto delle coordinate x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Designeremo al solito con a (essenzialmente positivo) il determinante $\sum \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$, e con $a^{(rs)}$ il complemento algebrico di a_{rs} in a, diviso per a.

Suppongasi che l'equazione:

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{r}\, A_r\, x'_r = \text{cost},$$

(le A essendo funzioni delle x) costituisca un integrale primo, lineare, come si vede, rispetto alle velocità, per il moto del sistema S, quando non agiscono forze. Dico che T ammette la trasformazione infinitesima $Zf = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, A^{(i)}\, p_i$, dove $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $A^{(i)} = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, a^{(ir)}\, A_r$. Per provarlo, mostrerò come tale enunciato non sia che l'espressione, secondo la terminologia ormai classica del sig. Lie, di un teorema, dimostrato in questi stessi Rendiconti [1] dal prof. Cerruti. Egli ha infatti osservato che, ogni qualvolta esiste un integrale lineare (1) per un sistema S sollecitato da forze indipendenti dalle velocità (nel qual caso la (1) è sempre integrale, anche quando, come si è supposto, non agiscono forze [2], è possibile nella varietà Φ di elemento lineare $ds = \sqrt{2\,\mathrm{T}\,dt^2}$ un moto *rigido* infinitesimo, per cui ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ subisce gli spostamenti $\delta x_1 = \varepsilon \mathrm{A}^{(1)}$, $\delta x_2 = \varepsilon \mathrm{A}^{(2)}$, ..., $\delta x_n = \varepsilon \mathrm{A}^{(n)}$, designando ε una costante infinitesima.

Ora il prof. Cerruti chiama, come è naturale, rigido uno spostamento, in cui i singoli elementi si comportano come fossero collegati rigidamente, e desume questa interpretazione dalla circostanza analitica che, ponendo, nell'espressione dell'elemento lineare $ds^2 = \sum_{rs}^{n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$, $x_i + \varepsilon \mathrm{A}^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ al posto di x_i (e quindi $dx_i + \varepsilon\, d\mathrm{A}^{(i)}$ al posto di dx_i), il ds^2, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, rimane invariato. Ciò equivale a dire manifestamente che l'elemento lineare ds, o, se si vuole, la forza viva T ammette la trasformazione infinitesima $\mathrm{Z}f$, estesa (erweiterte), si intende, alle velocità $\dfrac{dx_i}{dt}$.

Giova notare che, se nell'integrale $\sum_r^n \mathrm{A}_r\, x'_r = \mathrm{cost}$ si sostituiscono alle x' le variabili coniugate $p_i = \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}$, la corrispondente trasformazione infinitesima $\mathrm{Z}f$ riesce determinata identicamente, poichè il primo membro dell'integrale coincide allora col simbolo della trasformazione. Infatti da $p_i = \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} = \sum_i^n a_{ir}\, x'_r$, si trae $x'_r = \sum_i^n a^{(ir)}\, p_i$, e quindi:

$$\sum_r^n \mathrm{A}_r\, x'_r = \sum_{ri}^n a^{(ir)}\, \mathrm{A}_r\, p_i = \sum_i^n \mathrm{A}^{(i)}\, p_i = \mathrm{Z}f.$$

2. Applichiamo queste generalità al caso di un corpo rigido, mobile intorno ad un punto fisso O.

Si indichino al solito con x, y, z gli assi principali di inerzia nel punto O, con A, B, C i momenti principali, con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ i coseni degli angoli, che gli assi x, y, z formano con una terna qualunque d'assi fissi ξ, η, ζ, aventi l'origine nel punto fisso. Converrà aver presenti due sistemi di coordinate lagrangiane: i parametri razionali di Rodrigues [3]

(1) Aprile, 1895

(2) Cfr. la mia Nota, *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*. Atti dell'Acc. di Torino, 1896.

(3) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*. T. 1, pag. 34.

e gli angoli di Eulero. I primi conducono a stabilire utili raffronti, i secondi meglio si prestano al calcolo effettivo. Per evitare di scrivere tutto in doppio, ci atterremo alla rappresentazione parametrica di Rodrigues, riportando in coordinate euleriane [1] soltanto quelle formule, di cui dovrà farsi in appresso esplicito uso. Ritenuto ciò, avremo:

$$\alpha_1 = \frac{1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{\sigma^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2(x_3 + x_1 x_2)}{\sigma^2}, \quad \alpha_3 = \frac{2(-x_2 + x_1 x_3)}{\sigma^2},$$

$$\beta_1 = \frac{2(-x_3 + x_1 x_2)}{\sigma^2}, \quad \beta_2 = \frac{1 + x_2^2 - x_3^2 - x_1^2}{\sigma^2}, \quad \beta_3 = \frac{2(x_1 + x_2 x_3)}{\sigma^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{2(x_2 + x_1 x_3)}{\sigma^2}, \quad \gamma_2 = \frac{2(-x_1 + x_2 x_3)}{\sigma^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{\sigma^2},$$

dove si è posto per brevità $\sigma^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Le componenti della rotazione attorno agli assi principali di inerzia sono:

$$p = \alpha'_2 \alpha_3 + \beta'_2 \beta_3 + \gamma'_2 \gamma_3 = \frac{2}{\sigma^2}(x'_1 + x_3 x'_2 - x_2 x'_3)$$

$$q = \alpha'_3 \alpha_1 + \beta'_3 \beta_1 + \gamma'_3 \gamma_1 = \frac{2}{\sigma^2}(x'_2 + x_1 x'_3 - x_3 x'_1)$$

$$r = \alpha'_1 \alpha_2 + \beta'_1 \beta_2 + \gamma'_1 \gamma_2 = \frac{2}{\sigma^2}(x'_3 + x_2 x'_1 - x_1 x'_2)$$

e la forza viva del corpo assumerà la forma:

$$2\mathrm{T} = \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 \tag{2}$$

$$= \frac{4}{\sigma^4}\left\{\mathrm{A}(x'_1 + x_3 x'_2 - x_2 x'_3)^2 + \mathrm{B}(x'_2 + x_1 x'_3 - x_3 x'_1)^2 + \mathrm{C}(x'_3 + x_2 x'_1 - x_1 x'_2)^2\right\}$$

Esprimendo le rotazioni p, q, r per mezzo delle variabili p_1, p_2, p_3 coniugate ad x'_1, x'_2, x'_3, si trova:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}p &= \tfrac{1}{2}\left\{(1 + x_1^2)\,p_1 + (x_3 + x_1 x_2)\,p_2 + (-x_2 + x_1 x_3)\,p_3\right\} \\ \mathrm{B}q &= \tfrac{1}{2}\left\{(-x_3 + x_1 x_2)\,p_1 + (1 + x_2^2)\,p_2 + (x_1 + x_2 x_3)\,p_3\right\} \\ \mathrm{C}r &= \tfrac{1}{2}\left\{(x_2 + x_1 x_3)\,p_1 + (-x_1 + x_2 x_3)\,p_2 + (1 + x_3^2)\,p_3\right\}, \end{aligned}\right.$$

[1] Le chiamo così per consuetudine, ma effettivamente userò gli angoli ϑ, f, φ del Kirchhoff (*Mechanik*, pag. 43), che sono legati agli angoli ϑ, φ, ψ di Eulero dalle relazioni $f = -\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ e permettono di stabilire le espressioni di nove coseni, senza ricorrere a considerazioni geometriche.

le quali, passando alle coordinate euleriane ϑ, f, φ, ove si designino con $p_\vartheta, p_f, p_\varphi$ le $\frac{\partial T}{\partial \vartheta'}, \frac{\partial T}{\partial f'} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi'}$, possono essere scritte:

$$(3') \left\{ \begin{aligned} Ap &= \quad \operatorname{sen} f\, p_\vartheta + \cos f \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f + \frac{\cos f}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi \\ Bq &= -\cos f\, p_\vartheta + \operatorname{sen} f \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f + \frac{\operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi \\ Cr &= \qquad\qquad - p_f \end{aligned} \right.$$

Quando non agiscono forze, sussistono, come è ben noto, i tre integrali delle aree:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost}$$
$$\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost}$$
$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost},$$

che, espressi mediante $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$, divengono:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (-x_3+x_1x_2)p_2 + (x_2+x_1x_3)p_3\} = \text{cost} \\ &\tfrac{1}{2}\{(x_3+x_1x_2)p_1 + (1+x_2^2)p_2 + (-x_1+x_2x_3)p_3\} = \text{cost} \\ &\tfrac{1}{2}\{(-x_2+x_1x_3)p_1 + (x_1+x_2x_3)p_2 + (1+x_3^2)p_3\} = \text{cost}, \end{aligned} \right.$$

e, in coordinate euleriane:

$$(4') \left\{ \begin{aligned} &-\operatorname{sen}\varphi\, p_\vartheta - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f - \cos\varphi \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi = \text{cost} \\ &\cos\varphi\, p_\vartheta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\vartheta} p_f - \operatorname{sen}\varphi \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi = \text{cost} \\ &\qquad\qquad\qquad p_\varphi = \text{cost}. \end{aligned} \right.$$

Ne deduciamo che la forza viva T ammette le tre trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} Z_1 f &= \tfrac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (-x_3+x_1x_2)p_2 + (x_2+x_1x_3)p_3\} = \\ &= \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1}{2}x_1 U + \tfrac{1}{2}(x_2p_3 - x_3p_2) \\ Z_2 f &= \tfrac{1}{2}\{(x_3+x_1x_2)p_1 + (1+x_2^2)p_2 + (-x_1+x_2x_3)p_3\} = \\ &= \tfrac{1}{2}p_2 + \tfrac{1}{2}x_2 U + \tfrac{1}{2}(x_3p_1 - x_1p_3) \\ Z_3 f &= \tfrac{1}{2}\{(-x_2+x_1x_3)p_1 + (x_1+x_2x_3)p_2 + (1+x_3^2)p_3\} = \\ &= \tfrac{1}{2}p_3 + \tfrac{1}{2}x_3 U + \tfrac{1}{2}(x_1p_2 - x_2p_1) \end{aligned}$$

$$(U = x_1p_1 = x_2p_2 + x_3p_3)$$

Sarebbe facile verificare direttamente che le $Z_1 f, Z_2 f, Z_3 f$ soddisfanno alle relazioni:

$$(5) \qquad (Z_1 Z_2)f = -Z_3 f\,, \quad (Z_2 Z_3)f = -Z_1 f\,, \quad (Z_3 Z_1)f = -Z_2 f\,;$$

riesce tuttavia anche più semplice il riportarsi ad una proposizione di Jacobi ([1]), secondo cui gli integrali delle aree (espressi a mezzo delle coordinate x_i e delle variabili p_i) sono legati da equazioni del tipo (5), non solo, ciò che si constata immediatamente, per un sistema di punti liberi, ma eziandio per un sistema di punti vincolati in modo qualunque, purchè tale, si intende, da conservare gli integrali delle aree.

Proponiamoci di determinare la natura del gruppo, che trasforma in sè stessa la forza viva di un corpo rigido, distinguendo all'uopo tre casi:

a) i momenti principali di inerzia A, B, C sono fra loro diversi;

b) due momenti principali, p. es. A e B, sono eguali, ma distinti dal terzo;

c) i momenti principali di inerzia sono tutti eguali fra loro.

In questa Nota trovano posto soltanto poche considerazioni generali relative all'ipotesi *a*); alcune loro conseguenze e la discussione degli altri casi sono rimessi ad altra Comunicazione.

3. Caso *a*). — Si hanno, come è noto, i *soli* ([2]) integrali (4) linearmente indipendenti (cioè non legati da relazioni lineari *a coefficienti costanti*); quindi la forza viva T ammette le sole trasformazioni infinitesime indipendenti $Z_1 f, Z_2 f, Z_3 f$, le quali debbono per ciò costituire un gruppo G_3 a tre parametri. Questo vien messo in evidenza dalle (5), che determinano in pari tempo la struttura (Zusammensetzung) di G_3. Da essa direttamente ([3]) potrebbe desumersi che il nostro gruppo è costituito come il gruppo proiettivo $x' = \dfrac{a x + b}{x + c}$ sopra la retta. Si può per altro riconoscerlo in modo più

([1]) Werke, B. V., pag. 113. Giova avvertire che le (5) presentano un cambiamento di segno rispetto alle formule di Jacobi, poichè noi, seguendo il sig. Lie, abbiamo posto $(Z_1 Z_2)f = Z_1 Z_2 f - Z_2 Z_1 f = \sum_1^3 {}_i \left\{ \frac{\partial Z_1 f}{\partial p_i}\frac{\partial Z_2 f}{\partial x_i} - \frac{\partial Z_1 f}{\partial x_i}\frac{\partial Z_2 f}{\partial p_i} \right\}$, mentre il simbolo di Jacobi $[Z_1 f, Z_2 f]$ equivale a $-(Z_1 Z_2)f$. Cfr. anche: Mathieu, *Dynamique analytique*, pag. 243; Mayer A., *Ueber die allgmeinen Integrale der dynamischen Diffgl.* ecc. Math. Ann., B. 17, 1880. Aggiungo che la proposizione di Jacobi potrebbe ricavarsi in modo elegante come caso particolare di un teorema gruppale (Lie, *Theorie*, ecc., B. I., pg. 233).

([2]) Tedone, *Sopra i casi, in cui il problema del moto di un corpo rigido si riduc alle quadrature.* Nuovo Cimento, 1895. Veramente dalla ricerca del sig. Tedone risulta che, quando $A = B \gtrless C$, esiste, oltre al sistema (4), il solo integrale lineare $r = \text{cost}$. Siccome però quest'ultimo non compete al caso generale, il nostro asserto si trova giustificato.

([3]) Lie, B. III, pg. 713-717.

più vantaggioso per l'uniformità dell'indagine, prendendo a considerare il gruppo G_6 di proiettività, che trasformano in se stessa la sfera immaginaria $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$ nello spazio ordinario. Tale gruppo è generato ([1]) dalle trasformazioni infinitesime:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} p_1+x_1\mathrm{U}\ , & p_2+x_2\mathrm{U}\ , & p_3+x_3\mathrm{U}\ , \\ x_2p_3-x_3p_2\ , & x_3p_1-x_1p_3\ , & x_1p_2-x_2p_1 \end{array}}$$

o, ciò che è lo stesso, da:

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_1 f &= \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1}{2}x_1\mathrm{U}+\tfrac{1}{2}(x_2p_3-x_3p_2)\ , & \mathrm{Z}'_1 f &= \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1}{2}x_1\mathrm{U}-\tfrac{1}{2}(x_2p_3-x_3p_2) \\ \mathrm{Z}_1 f &= \tfrac{1}{2}p_2+\tfrac{1}{2}x_2\mathrm{U}+\tfrac{1}{2}(x_3p_1-x_1p_3)\ , & \mathrm{Z}'_2 f &= \tfrac{1}{2}p_2+\tfrac{1}{2}x_2\mathrm{U}-\tfrac{1}{2}(x_3p_1-x_1p_3) \\ \mathrm{Z}_3 f &= \tfrac{1}{2}p_3+\tfrac{1}{2}x_3\mathrm{U}+\tfrac{1}{2}(x_1p_2-x_2p_1)\ , & \mathrm{Z}'_3 f &= \tfrac{1}{2}p_3+\tfrac{1}{2}x_3\mathrm{U}-\tfrac{1}{2}(x_1p_2-x_2p_1) \end{aligned}$$

la distinzione delle trasformazioni infinitesime del gruppo in due categorie $\mathrm{Z}_i f$ $(i=1,2,3)$ e $\mathrm{Z}'_j f$ $(j=1,2,3)$ corrispondendo alla circostanza che le tre trasformazioni di ciascuna categoria determinano due sottogruppi invarianti semplicemente transitivi, i quali trasformano in sè le singole generatrici, situate rispettivamente sull'una o sull'altra delle due serie rigate (immaginarie) Γ e Γ' appartenenti alla quadrica $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$. Le trasformazioni $\mathrm{Z}f$, che lasciano ferme le singole generatrici della serie Γ, operano su Γ' (e le $\mathrm{Z}'f$ su Γ) come le proiettività binarie sopra la varietà semplicemente infinita, e ciò collima con quanto s'è poc'anzi avvertito; notiamo ancora che, non solo $\mathrm{Z}_i f$ $(i=1,2,3)$ e $\mathrm{Z}'_j f$ $(j=1,2,3)$ sono sottogruppi invarianti, ma ben anco le singole trasformazioni $\mathrm{Z}f$ sono permutabili colle $\mathrm{Z}'f$. Tradotto in linguaggio analitico, ciò significa che valgono le relazioni:

$$(\mathrm{Z}_i\,\mathrm{Z}'_j)\,f=0\ ,\ (i,j=1,2,3) \tag{6}$$

le quali del resto si possono ovviamente verificare.

Ritornando al gruppo G_3 di T, donde abbiamo preso le mosse, siamo ora in grado di caratterizzarlo, dicendo che è simile a quel gruppo proiettivo dello spazio ordinario, il quale trasforma in sè una serie rigata Γ appartenente alla sfera immaginaria $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1=0$. Di qua si potrebbe ricavarne senza integrazione la espressione generale delle sue trasformazioni finite, poichè tali trasformazioni sono date, come si vede immediatamente, dalle omografie biassiali, che hanno per assi una coppia qualunque di generatrici coniugate di Γ'.

([1]) Lie, ibidem, pg. 410.