ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 dicembre 1896.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine*. Nota del Socio U. Dini.

Riprendendo le formole e i risultati della mia Nota su questo stesso soggetto pubblicata nel fascicolo precedente, e le numerazioni tutte relative, aggiungo ora alcune considerazioni a complemento di quelli studî, e altre applicazioni delle formole (2) e (3) del § 1.

8. Osserviamo che data una equazione della forma (10) o (16), si può moltiplicarla tutta per un fattore G che, quando si voglia che non avvengano cambiamenti nei segni dei suoi termini, potremo supporre sempre positivo, e prenderlo ad es. sotto la forma e^{μ} con μ funzione regolare entro C; e allora nei valori (18) o (21) di H alcuni termini subiscono cambiamenti che non corrispondono alla semplice moltiplicazione di essi per G; e si può quindi profittare della indeterminazione di questa funzione G, e sceglierla in modo da fare acquistare certe particolarità alle quantità stesse H, o ad alcune parti di esse.

Così ad esempio per ciò che si riferisce al coefficiente di U^2 in H del quale ci occupammo già in modo speciale al § 5, si può osservare che, senza fare uso del processo che già seguimmo, basato sulla indeterminazione delle quantità m ed n, e pel quale fu necessario supporre che il determinante delle forme (22) o (27) fosse positivo o nullo e non fossero $\lambda = \mu = \nu = 0$, profittando della indeterminazione di G potremo scegliere le quantità m ed n come meglio ci tornerà comodo, e prenderle ad esempio uguali a zero o ad altre quantità date, e poi determinare G colla integrazione di una equazione a derivate parziali in modo che il detto coefficiente di U^2 risulti diverso da zero e positivo in tutto C; e ciò evidentemente anche nel caso in cui i coefficienti della forma (22) o (27) fossero tutti nulli, o fossero nulli a, b, c e h; dal che apparisce anche che i risultati precedenti si estendono, sotto certe condizioni, anche alle equazioni a derivate parziali del primo ordine.

E di questa possibilità di determinare il fattore G in modo da rendere soddisfatte certe condizioni speciali, ci si può anche valere per sostituire alla forma (27), quando ad es. i suoi coefficienti siano tutti zero, o il loro determinante prenda anche valori negativi, un'altra forma i cui coefficienti o il cui determinante presentino date particolarità; però non bisognerà trascurare di osservare che le nuove condizioni da soddisfare potranno far sì che il valore di G venga a presentare qualche singolarità entro C, al che però potrà talvolta rimediarsi sostituendo al campo C una porzione determinata di esso.

Supponendo ad es. di partire da una equazione della forma (10) o (16) nella quale h sia data o sia ridotta ad essere una costante, se avverrà che i coefficienti della forma corrispondente (27), cioè di:

$$\left(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+2\left(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\left(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

vengano ad essere zero o avere un determinante negativo Δ in qualche punto, linea, o porzione superficiale di C, colla introduzione del fattore G alla forma stessa verrà sostituita l'altra:

$$\left(Ga+Gh\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+hU\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+2\left(Gb-Gh\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\right.$$
$$\left.-hU\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\left(Gc+Gh\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+hU\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

il cui determinante Δ_1 sarà:

$$\Delta_1=G\Delta+hU\left\{\left(a+h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)G\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+2\left(b-h\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)G\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}+\right.$$
$$\left.+\left(c+h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)G\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}-hU\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right\};$$

e se si vorrà che questo determinante Δ_1 abbia un certo valore speciale dato D_1, bisognerà colla integrazione di una equazione a derivate parziali di 2° ordine determinare G in modo che si abbia $\Delta_1=D_1$; ma ciò evidentemente *potrà* portare che G debba avere qualche singolarità entro C.

Ammettendo ad es. che sul contorno s di C la U sia zero, e tale non sia D_1, e anzi sia $D_1>0$, bisognerà evidentemente che sul contorno stesso G o le sue derivate siano infinite; ma se sul contorno sarà $D_1=0$, allora non è da escludere che si possa soddisfare entro C alla equazione $\Delta_1=D_1$ con una funzione G che sia integrale di essa e sul contorno sia sempre uguale a zero; e evidentemente questa funzione potrà darsi che esista, se per la equazione $\Delta_1 = D_1$ in G non verranno soddisfatte le condizioni che si avevano nei paragrafi precedenti per la funzione U definita dalle equazioni (10) o (16).

Ulteriori sviluppi però sarebbero necessarî su questo punto, e di essi mi occuperò in altra occasione, mostrando allora in particolare come malgrado la presenza della funzione U e delle sue derivate in Δ_1 possano queste osservazioni essere utili anche in casi nei quali U non è conosciuta.

9. Un' altra trasformazione, che comprende come casi particolari alcune comunemente usate, è quella per la quale alla funzione U che comparisce nella equazione data se ne sostituisce un' altra z legata ad U dalla formola

$$U = f(x\,, y\,.\, z)\,. \tag{33}$$

Indicando infatti per abbreviare con $p\,, q\,, r\,, s\,, t$ le solite derivate parziali di z e calcolando $\frac{\partial U}{\partial x}\,, \frac{\partial U}{\partial y}\,, \dots$ colla regola di derivazione delle funzioni composte, basta sostituire nella equazione data (10) o (16), p. es. nella (10), i valori che così si trovano, per ridurre la equazione stessa all' altra:

$$Ar + 2Bs + Ct + 2H(rt - s^2) + L = 0\,, \tag{34}$$

dove:

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \left\{ a_1 + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\, q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\, q^2 \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial z}\,,\\
B &= \left\{ b_1 - 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\, p + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\, q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\, pq \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial z}\,,\\
C &= \left\{ c_1 + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\, p + \frac{\partial^2 f}{\partial z}\, p^2 \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial z}\,,\\
H &= h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2,\\
L &= \left\{ a_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \right)^2 \right) \right\} p^2 + 2 \left\{ b_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \right.\\
&\qquad \left. + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \right\} pq + \left\{ c_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \right.\\
&\qquad \left. + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \right)^2 \right) \right\} q^2 + 2 \left\{ a_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + b_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + \right.\\
&\qquad \left. + 2\,h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \right) \right\} p + 2 \left\{ b_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + c_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + \right.\\
&\qquad \left. + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \right) \right\} q + a_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + c_1\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} +\\
&\qquad + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \right)^2 \right) + l_1\,,
\end{aligned}\right. \tag{35}$$

indicando con $a_1\,, b_1\,, c_1\,, h_1\,, l_1$ ciò che divengono $a\,, b\,, c\,, h\,, l$ quando invece di U, $\frac{\partial U}{\partial x}\,, \frac{\partial U}{\partial y} \dots$ vi si pongono i loro valori ottenuti dalla (33);

e può darsi evidentemente che la nuova equazione presenti nei suoi coefficienti certe particolarità che giovino per l'applicazione delle formole dei paragrafi precedenti.

10. Supponendo in particolare che la (33) abbia la forma $U = f(z)$, è evidente che la equazione trasformata della (10) diviene:

$$\left\{(a_1 + 2h_1 f'' q^2) r + 2(b_1 - 2h_1 f'' pq) s + (c_1 + 2h_1 f'' p^2) t + \right.$$
$$\left. + 2h_1 f'(rt - s^2)\right\} f' + L = 0$$

con:

$$L = f''(a_1 p^2 + 2b_1 pq + c_1 q^2) + l_1 ;$$

e quindi la forma (22) che viene a figurare nel valore (21) di H corrispondente a questa equazione in z sarà:

$$\left\{ a_1(f' - f''z) + h_1 f'^2 t + z \frac{\partial^2(h_1 f'^2)}{\partial y^2} \right\} p^2 + 2 \left\{ b_1(f' - f''z) - h_1 f'^2 s - \right.$$
$$\left. - z \frac{\partial^2(h_1 f'^2)}{\partial x \, \partial y} \right\} pq + \left\{ c_1(f' - f''z) + h_1 f'^2 r + z \frac{\partial^2(h_1 f'^2)}{\partial x^2} \right\} q^2,$$

ed è notevole che in questa i coefficienti a_1, b_1, c_1 spariscono quando sia $f' = f''z$, cioè quando si prenda $U = \alpha z^2 + \beta$ con α e β costanti.

11. Supponendo invece $U = \lambda + z$, con λ funzione determinata (ma da prendersi a piacere) di x e y, si vede subito dalle (35) che la equazione trasformata della (10) diviene:

$$(36) \quad \left(a_1 + 2h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}\right) r + 2\left(b_1 - 2h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y}\right) s + \left(c_1 + 2h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}\right) t +$$
$$+ 2h_1(rt - s^2) + a_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + 2h_1 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y}\right)^2\right) +$$
$$+ l_1 = 0,$$

e la forma (27) corrispondente a questa equazione sarà:

$$\left(a_1 + 2h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + h_1 t + z \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\right) p^2 + 2\left(b_1 - 2h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} - h_1 s - z \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \, \partial y}\right) pq +$$
$$+ \left(c_1 + 2h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + h_1 r + z \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\right) q^2$$

e potrà anche scriversi:

$$(37) \quad \left(a_1 + h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + h_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\right) p^2 + 2\left(b_1 - h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} - \right.$$
$$\left. - h_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} - z \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \, \partial y}\right) pq + \left(c_1 + h_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + h_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\right) q^2 ;$$

e se anche senza conoscere l'integrale U della (10) sapremo che nel campo C esso si mantiene finito e continuo insieme alle sue derivate prime e seconde, e queste non superano in valore assoluto un certo numero, allora supponendo senz'altro $h_1 = 1$, e indicando con $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ numeri maggiori dei valori assoluti di $a + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $b - \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}$, $c + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, è evidente che se prenderemo

$\lambda = X + Y$ con X e Y funzioni di x e y soltanto respettivamente, basterà che sia ad es.:

$$X'' = \bar{c} + \bar{b}\,, \quad Y'' = \bar{a} + \bar{b}\,, \quad \text{o} \quad X = \frac{\bar{c} + \bar{b}}{2} x^2\,, \quad Y = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} y^2,$$

per essere certi che i coefficienti di p^2 e q^2 nella (37) saranno positivi e maggiori di $\bar{b}$, e quindi il determinante della forma stessa (37) sarà positivo; talchè col fare la trasformazione:

$$U = \tfrac{1}{2}(\bar{c} + \bar{b})\,x^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})\,y^2 + z\,,$$

con $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ determinati nel modo indicato, la forma (27) corrispondente alla equazione trasformata in z verrà ridotta a determinante positivo, il che mi pare abbastanza notevole.

12. Pel solito però questa trasformazione $U = \lambda + z$ si applica alle equazioni di forma (16) per le quali cioè $l = 2d\dfrac{\partial U}{\partial x} + 2e\dfrac{\partial U}{\partial y} + gU - g_0$, e quando in essa i coefficienti a, b, c... contengono soltanto x e y e quindi non mutano colla trasformazione. In questo caso la quantità l_1 trasformata di l è:

$$l_1 = 2d\frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2e\frac{\partial \lambda}{\partial y} + g\lambda - g_0 + 2dp + 2eq + gz\,.$$

e prendendo λ in modo che si abbia:

$$a\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + 2h\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) +$$
$$+ 2d\frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2e\frac{\partial \lambda}{\partial y} + g\lambda = g_0\,,$$

cioè supponendo che λ sia un integrale particolare dell' equazione data stessa (16), l' equazione trasformata in z diverrà:

$$\left(a + 2h\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}\right) r + 2\left(b - 2h\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\,\partial y}\right) s + \left(c + 2h\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}\right) t +$$
$$+ 2h(rt - s^2) + 2dp + 2eq + gz = 0\,,$$

cioè sarà della stessa forma della (16) ma mancherà del termine noto g_0; talchè nel fare le applicazioni dei teoremi del § 6 non avremo da considerare il termine $g_0 U$, e quindi tutte le condizioni si ridurranno più semplici. E così nel caso particolare di $h = 0$, cioè delle equazioni della forma:

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial U}{\partial x} + 2e\frac{\partial U}{\partial y} + gU = g_0\,, \tag{38}$$

i coefficienti delle quali contengano soltanto x e y, si ritrova il teorema dei signori Bianchi e Picard sulla unicità degli integrali (regolari) che prendono valori dati al contorno di C quando $ac - b^2 \geq 0$; e le limitazioni che si hanno pel campo C sono quelle che vengono dalle considerazioni del § 5 o del § 8.

Più generalmente poi, qualunque siano i coefficienti della equazione data (10) o (16), se si vorrà che un suo integrale sia regolare in C e abbia sul contorno valori dati, allora si può dire che quando con un processo qualsiasi si riesca a trovare una funzione λ pure regolare in C che sul contorno abbia appunto quei valori, se avverrà che col porre $U = \lambda + z$ la equazione trasformata in z (36) soddisfi alle condizioni del § 6, la stessa funzione λ sarà l'integrale richiesto, il quale perciò sarà unico.

13. Risultati notevoli si hanno pure se si considera la trasformazione $U = \lambda + \mu z$, con λ e μ funzioni delle sole x e y; poichè nel caso ad es. della equazione (38) se prenderemo per λ un integrale particolare della equazione stessa (38) e per μ un integrale dell'altra che si ottiene da questa col sopprimervi il 2° membro, la equazione trasformata in z mancherà del termine in z e di quello indipendente da z.

Più generalmente poi si potrebbe considerare la trasformazione $U = f(x,y,z)$ dove $f(x,y,z)$ rispetto a z è una funzione razionale intera di grado qualsiasi n; e determinandone opportunamente i coefficienti come funzioni di x e y si potrebbe far sì che la equazione trasformata venisse ad avere proprietà speciali. Così ad es. prendendo per $f(x,y,z)$ una funzione di 2° grado $\lambda + \mu z + \nu z^2$ con λ, μ, ν funzioni di x e y da determinarsi, allora sotto certe condizioni rispetto ai coefficienti $a, b, c \ldots$, nella equazione trasformata in z della (38) si faranno sparire anche i termini in p e q, e questa si presenterà sotto la forma:

$$(ar + 2bs + ct)(\mu + 2\nu z) + 2(ap^2 + 2b\mu q + cq)\nu = 0;$$

e nel valore (21) di H applicato a questa equazione, la forma (22) diverrà la seguente:

$$H = \mu(ap^2 + 2bpq + cq^2).$$

Però è da notare che con queste trasformazioni, pure essendo regolare entro C la funzione U, potrà non esserlo la corrispondente funzione z; e quindi il giungere a concludere che non esistono funzioni regolari z di x e y entro C che siano integrali delle equazioni trasformate non permetterà, senza altre considerazioni, di trarre la stessa conclusione per la funzione U.

14. In generale poi è da notare che quando in una equazione a derivate parziali di qualsiasi ordine in U si fa la trasformazione $U = f(x, y, z)$, si può come nei casi precedenti dare avanti la funzione f e proporsi la determinazione di z in funzione di x e y in modo da soddisfare alla equazione trasformata, come si può invece, dandosi anticipatamente questa funzione $z(x, y)$, proporsi di determinare la funzione f, di tre variabili x, y, z considerate come indipendenti, in modo da soddisfare la equazione trasformata stessa riguardata come una equazione a derivate parziali in f. Nel primo caso essendo allora data f come funzione dei punti dello spazio, il problema viene ad equivalere a quello di cercare su quale superficie $z = z(x, y)$ la funzione data dei punti dello spazio $f(x, y, z)$ diventa una funzione che ha le particolarità stabilite dalla equazione che si considera; nel secondo caso invece

si cerca la funzione f dei punti dello spazio che su una superficie data $z = z(x, y)$ ha le particolarità che vengono dalla equazione stessa.

Invece poi di trasformazioni che fanno di endere la funzione U da un'altra z, si potrebbero fare cambiamenti delle variabili indipendenti x e y in altre u e v; ma noi non ci fermeremo su questi.

15. Aggiungiamo che i risultati ottenuti finora vengono a riferirsi più specialmente a equazioni (10) o (16) per le quali $ac - b^2 \geq 0$; ma per la presenza di l e g_0 nelle formole (18) o (19) che danno i valori di H, e per le considerazioni generali del § 5, si comprende che potranno talvolta estendersi anche a casi nei quali questa condizione di $ac - b^2 \geq 0$ in tutto C non sia soddisfatta.

Così ad es. quando questo avvenga, ma l abbia la forma:

$$l = \frac{1}{U}\left(\alpha + h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{U}\left(\beta - h\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - U\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \\ + \frac{2}{U}\left(\gamma + h\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \bar{l}$$

è evidente che la forma di 2° grado (22) in $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ che si ha nella espressione (21) di H, si ridurrà alla seguente:

$$(a - \alpha)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2(b - \beta)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + (c - \gamma)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

e il suo determinante $(a - \alpha)(c - \gamma) - (b - \beta)^2$, a seconda dei valori che avranno α, β, γ potrà non essere mai negativo nel campo C, e i teoremi precedenti potranno essere applicabili.

16. Tutti questi risultati suppongono *l'esistenza di integrali della equazione data* (10) *o* (16) *che siano regolari in tutto il campo* C (il contorno incluso) o nella porzione di questo campo che si considera; e come è noto i problemi relativi all' esistenza degli integrali medesimi in generale presentano gravi difficoltà, e sono risoluti soltanto per casi speciali.

È poi da notare (sempre sotto questa restrizione relativa alla esistenza della funzione integrale U regolare entro C) che i teoremi relativi alla unicità dell' integrale stesso si estendono anche a numerosi altri casi nei quali si hanno altre condizioni al contorno diverse da quella di essere dati i valori di U sul contorno stesso.

Se si osserva infatti che nella formola (15) sotto l' integrale del secondo membro figura il prodotto $\bar{L}U$, si vede subito che per la validità dei teoremi che abbiamo dato sull' essere zero U in tutto C, non importa che sul contorno sia zero U, ma basta che lo sia il prodotto $\bar{L}U$; e quindi, sempre « sotto le condizioni dei § 6 e seg. essi varranno anche quando si sappia « che sul contorno stesso è zero $\bar{L}$ e non si sappia nulla di U, o quando « si sappia che su una parte del contorno è zero U e sull' altra parte è

« zero $\overline{\mathrm{L}}$; e in corrispondenza si avranno altri teoremi sulla unicità della « funzione integrale delle equazioni (20) quando siano date altre condizioni « speciali al contorno ».

E così supponendo ad es. che si tratti delle equazioni della forma (16), nel qual caso secondo le formole del § 3 si ha $\overline{\mathrm{L}} = \mathrm{L} + d\mathrm{U}\frac{\partial x}{\partial p} + e\mathrm{U}\frac{\partial y}{\partial p}$, dove L è dato dalla (13), basta osservare che $\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial s}$ per vedere subito che $\overline{\mathrm{L}}$ può porsi sotto la forma:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{L}} = {} & a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + b\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial p}\right) + c\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \\ & + h\left[\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x \partial y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p} + \left(-\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x \partial y}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right] - \\ & - \tfrac{1}{2}\mathrm{U}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right\} - \tfrac{1}{2}\mathrm{U}\left\{\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2m - 2d\right)\frac{\partial x}{\partial p} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} - 2n - 2e\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right\},\end{aligned}$$

nella quale il fattore che moltiplica h può anche scriversi $\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}}\right)$ quando $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ non sia zero; e di qui si scorge subito come si potrebbero indicare varî casi notevoli nei quali a seconda dei dati relativi al contorno si avrà $\overline{\mathrm{L}} = 0$ su tutto o parte del contorno stesso.

In particolare ponendoci nel caso delle equazioni di tipo ellittico $a = c = 1$, $b = h = 0$ considerate dai signori Bianchi e Picard, siccome si avrà:

$$\overline{\mathrm{L}} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p} + (m + d)\frac{\partial x}{\partial p} - (n + e)\frac{\partial y}{\partial p},$$

e può sempre prendersi (§ 8) $m = -d$, $n = -e$, si potrà senz' altro concludere che l' integrale delle equazioni della forma:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + 2e\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + g\mathrm{U} = g_0$$

« è completamente determinato almeno in campi speciali quando su una « parte del contorno è data la funzione U, e sull' altra parte è data la de- « rivata rispetto alla normale $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p}$ ».

17. Passiamo ora a dare altre applicazioni delle formole (2) e (3).

Supponiamo perciò nella (2) $U_1 = U$, $V_1 = V$, $\gamma = \gamma_1 = \delta = \delta_1 = 0$, avremo la formola:

$$(39)\quad \iint \Big[\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \beta \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + V\Big\{ \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} +$$
$$+ (\alpha_1 + \beta)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \Big(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x} + \Big(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}\Big\}\Big] dx\,dy =$$
$$= - \int \Big[\Big(\alpha \frac{\partial x}{\partial p} + \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial p}\Big)\frac{\partial U}{\partial x} + \Big(\beta \frac{\partial x}{\partial p} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial p}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}\Big] V ds,$$

e facendovi, una volta $\beta_1 = \alpha$, $\alpha_1 = \beta$, e un'altra $\beta_1 = \alpha$, $\alpha_1 = -\beta$, coll'osservare che $\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial s}$ si ottengono le altre:

$$(40)\quad \iint \Big[\alpha \Big(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\Big) + \beta \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\Big) +$$
$$+ V\Big\{\alpha \Delta^2 U + 2\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \Big(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x} + \Big(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}\Big\}\Big] dx\,dy =$$
$$= - \int \Big[\alpha \frac{\partial U}{\partial p} + \beta \Big(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial p}\Big)\Big] V\,ds,$$

$$(41)\quad \iint \Big[\alpha \Big(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\Big) + \beta \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\Big) + V\Big\{\alpha \Delta^2 U +$$
$$+ \Big(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial x} + \Big(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\Big)\frac{\partial U}{\partial y}\Big\}\Big] dx\,dy = - \int \Big(\alpha \frac{\partial U}{\partial p} - \beta \frac{\partial U}{\partial s}\Big) V\,ds,$$

talchè se si farà nella prima di queste $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $U = 0$, e nella seconda $\alpha = 0$, $\beta = 1$, e $\alpha = 1$, $\beta = 0$ avremo le formole note:

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint \Big\{\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)^2 + U\Delta^2 U\Big\} dx\,dy = - \int U \frac{\partial U}{\partial p}\,ds, \\ &\iint \Big(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\Big) dx\,dy = \int V \frac{\partial U}{\partial s}\,ds, \\ &\iint \Big\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\Big) + V\Delta^2 U\Big\} dx\,dy = - \int V \frac{\partial U}{\partial p}\,ds, \end{aligned}\right.$$

delle quali la prima è caso particolare dell'ultima, perchè si ha da questa facendovi $V = U$. E in tutte queste il $\Delta^2 U$ rappresenta al solito la somma delle derivate seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$.

Se nella (2), pure facendovi $U_1 = U$, $V_1 = V$, avessimo lasciate indeterminate γ, γ_1, δ e δ_1, avremmo avuto altre formole più generali che qui non stiamo a scrivere, ma che possono esse pure giovare in casi particolari.

18. Risultati più importanti si hanno dalle applicazioni della formola (3).

Facendovi $U_1 = U$, $V_1 = V$, $\alpha_1 = \beta$, $\delta = \delta_1 = 0$, e aggiungendo ai due membri di essa quelli dell'altra:

$$\int\!\!\int \left[2V\left(\gamma \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial y}\right) + 2UV\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + 2U\left(\gamma \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] dx\, dy = -2\int UV\left(\gamma \frac{\partial x}{\partial p} + \gamma_1 \frac{\partial y}{\partial p}\right) ds,$$

che si ha dalla (1) cambiandovi X, Y in 2γ UV e $2\gamma_1$ UV, basterà prendere γ e γ_1 determinati dalle formole:

$$2\gamma = 2d - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad 2\gamma_1 = 2e - \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y},$$

per ottenere subito la formola seguente:

$$(43) \quad \int\!\!\int \left[V\left\{\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial U}{\partial x} + 2e \frac{\partial U}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left. + gU - g_0\right\} - U\left\{\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \beta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} - d\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \right.$$
$$+ 2\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} - e\right)\frac{\partial V}{\partial y} +$$
$$\left.\left. + \left(g + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial d}{\partial x} - 2\frac{\partial e}{\partial y}\right)V\right\}\right] dx\, dy = -\int\!\!\int g_0 V dx\, dy -$$
$$-\int \left[\left(\alpha \frac{\partial x}{\partial p} + \beta \frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \left(\beta \frac{\partial x}{\partial p} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \left\{\left(2d - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p} + \left(2e - \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right\} UV \right] ds.$$

Cambiamo ora in questa α, β, β_1 respettivamente in $a + h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $b - h\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $c + h\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, e osserviamo che allora fra i termini che moltiplicano U sotto l'integrale doppio nel primo membro, come fra quelli sotto l'integrale semplice del secondo membro, vengono a figurarne alcuni che contengono h e le sue derivate; e indicando con P_h l'insieme di quelli del primo membro e con Q_h l'insieme di quelli del secondo, con facili calcoli si trova:

$$(44) \quad P_h = \frac{\partial^2\left(h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot V\right)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\left(h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cdot V\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\left(h \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot V\right)}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial^2 (hV)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 (hV)}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (hV)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

$$(45) \quad Q_h = \left\{U\frac{\partial (hV)}{\partial x} - hV\frac{\partial U}{\partial x}\right\}\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial s} - \left\{U\frac{\partial (hV)}{\partial y} - hV\frac{\partial U}{\partial y}\right\}\frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial s}.$$

Si otterrà la formola seguente:

$$(46)\quad \iint \Big[V\Big(a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2h\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big)+$$

$$+2d\frac{\partial U}{\partial x}+2e\frac{\partial U}{\partial y}+gU-g_0\Big\}-U\Big\{a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+$$

$$+2\Big(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}-d\Big)\frac{\partial V}{\partial x}+2\Big(\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}-e\Big)\frac{\partial V}{\partial y}+$$

$$+\Big(g+\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-2\frac{\partial d}{\partial x}-2\frac{\partial e}{\partial y}\Big)V+P_h\Big\}\,dx\,dy+$$

$$+\iint g_0\,V\,dx\,dy=-\int\Big[\Big(a\frac{\partial x}{\partial p}+b\frac{\partial y}{\partial p}\Big)\Big(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\Big)+$$

$$+\Big(b\frac{\partial x}{\partial p}+c\frac{\partial y}{\partial p}\Big)\Big(V\frac{\partial U}{\partial y}-U\frac{\partial V}{\partial y}\Big)+\Big\{\Big(2d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\Big)\frac{\partial x}{\partial p}+$$

$$+\Big(2e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}\Big)\frac{\partial y}{\partial p}\Big\}UV+Q_h\Big]\,ds\,,$$

che vale qualunque siano U e V purchè regolari entro C; e se in questa si fanno $a=b=c=d=e=g=g_0=0$ si trova l'altra, che vale essa pure qualunque siano U e V:

$$(47)\quad \iint 2h\,V\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big)\,dx\,dy-\iint UP_h\,dx\,dy=-\int Q_h\,dx\,dy\,,$$

mediante la quale sottraendo si fanno sparire dalla precedente i termini che contengono P_h e Q_h, e si giunge allora a un'altra formola, che del resto si sarebbe potuta ottenere anche dalla precedente considerandola prima nel caso di $h=0$, e poi aggiungendo e togliendo sotto l'integrale doppio il termine $2hV\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big)$.

E così evidentemente applicando questa formola al caso degli integrali U delle equazioni della forma (16), cioè:

$$(48)\quad a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2h\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big)+$$

$$+2d\frac{\partial U}{\partial x}+2e\frac{\partial U}{\partial y}+gU=g_0\,,$$

e ponendo per semplicità di scrittura:

$$(49)\quad F(U)=a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2d\frac{\partial U}{\partial x}+2e\frac{\partial U}{\partial y}+gU\,,$$

$$(50)\quad G(V)=a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+2\Big(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}-d\Big)\frac{\partial V}{\partial x}+$$

$$+2\Big(\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}-e\Big)\frac{\partial V}{\partial y}+\Big(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-2\frac{\partial d}{\partial x}-2\frac{\partial e}{\partial y}+g_0\Big)V\,,$$

con che la equazione stessa (48) viene a scriversi:

$$F(U)+2h\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)=g_0\,,$$

e la equazione $G(V)=0$ corrisponde precisamente a quella che dicesi *equazione aggiunta* della $F(U)=0$, si può ora affermare che « se U è un integrale della equazione (48) che sia regolare in tutto un campo C (il contorno incluso) nel quale sono pure regolari i coefficienti della equazione stessa che ora supporremo funzioni di x e y soltanto, avremo la formola seguente:

$$(51)\qquad \iint\left\{UG(V)-g_0 V\right\}dx\,dy+\iint P_h\,dx\,dy=$$
$$=\int\Bigg[\left(a\frac{\partial x}{\partial p}+b\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\left(b\frac{\partial x}{\partial p}+c\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial y}-U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$
$$+\left\{\left(2d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p}+\left(2e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right\}UV+Q_h\Bigg]ds\,,$$

« nella quale P_h e Q_h sono dati dalle (44) e (45), e avremo pure l'altra:

$$(52)\ \iint\left\{UG(V)-g_0 V\right\}dx\,dy+2\iint hV\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)dx\,dy=$$
$$=\int\Bigg[\left(a\frac{\partial x}{\partial p}+b\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\left(b\frac{\partial x}{\partial p}+c\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial y}-U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$
$$+\left\{\left(2d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p}+\left(2e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right\}UV\Bigg]ds\,,$$

« che si ottiene anche sommando la precedente (51) colla (47) »; e queste varranno qualunque sia la funzione V, purchè regolare anch'essa entro C, quando U sia, come abbiamo detto, un integrale della equazione (48) regolare esso pure entro C (il contorno incluso), e G(V) sia definito dalla (50).

In queste formole poi a $\frac{\partial x}{\partial p}$ e $\frac{\partial y}{\partial p}$ nei secondi membri potremo sostituire $-\frac{\partial y}{\partial s}$ e $\frac{\partial x}{\partial s}$, per modo che la (52) ad es. potrà scriversi:

$$(53)\ \iint\left\{UG(V)-g_0 V\right\}dx\,dy+2\iint hV\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)dx\,dy=$$
$$=\int\Bigg[(-a\,dy+b\,dx)\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+(-b\,dy+c\,dx)\left(V\frac{\partial U}{\partial y}-U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$
$$+\left\{-\left(2d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)dy+\left(2e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)dx\right\}UV\Bigg],$$

i differenziali dx e dy nel secondo membro essendo presi lungo il contorno s di C.

Queste formole comprendono quelle mediante le quali coi processi di Riemann si trovano in un campo C gli integrali regolari delle equazioni $\Delta^2 U = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} + d \frac{\partial U}{\partial x} + e \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} g U = 0$ pei quali sono date condizioni speciali al contorno del campo; e col particolarizzare i coefficienti $a, b, c \ldots$ si applicano ai varî casi delle equazioni di tipo ellittico, iperbolico e parabolico, come a quelle nelle quali le derivate seconde delle funzioni vi figurano soltanto col termine $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2$, e anche alle equazioni del primo ordine.

Esse, in sostanza, nel caso di $h = 0$, si trovano già, determinate con altri processi e specialmente in vista delle equazioni del tipo iperbolico, anche nel secondo volume della *Théorie générale des surfaces* di Darboux (pag. 74 e seg.); ma che io sappia non ne sono state fatte finora tutte quelle applicazioni che più meritano di essere segnalate. Farò queste applicazioni in un prossimo lavoro, ottenendo allora alcuni risultati, che a mio credere, hanno una particolare importanza.

Fisica. — *Dell' azione dell' ozonatore sui gas attivati dai raggi X.* Nota del Socio EMILIO VILLARI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e del loro uso.* Nota del dott. PIETRO BURGATTI [1], presentata dal Socio V. CERRUTI.

Quando un' equazione lineare alle derivate parziali del 2° ordine è ridotta alla forma

$$(0) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 ,$$

si sa riconoscere, in una maniera molto semplice (Darboux, *Théorie des surfaces*, T. II, Cap. II), se la sua integrazione sia immediatamente ridu-

(1) Mentre questo lavoro stava in corso di stampa, è comparsa nei Comptes rendus del 30 Novembre una Nota del sig. Cotton sopra lo stesso soggetto. Egli ha trovato due invarianti che differiscono da quelli considerati in questa Nota, ma uno di essi coincide con un invariante da me già ottenuto in una Memoria: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali* ecc., pubblicata negli Annali di Matematica del 1895 (Serie 2ª — T. XXIII). Io però non dedussi le conseguenze che ha ora dedotte il sig. Cotton.