ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Queste formole comprendono quelle mediante le quali coi processi di Riemann si trovano in un campo C gli integrali regolari delle equazioni $\Delta^2 U = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} + d\frac{\partial U}{\partial x} + e\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} g U = 0$ pei quali sono date condizioni speciali al contorno del campo; e col particolarizzare i coefficienti $a, b, c \dots$ si applicano ai varî casi delle equazioni di tipo ellittico, iperbolico e parabolico, come a quelle nelle quali le derivate seconde delle funzioni vi figurano soltanto col termine $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2$, e anche alle equazioni del primo ordine.

Esse, in sostanza, nel caso di $h = 0$, si trovano già, determinate con altri processi e specialmente in vista delle equazioni del tipo iperbolico, anche nel secondo volume della *Théorie générale des surfaces* di Darboux (pag. 74 e seg.); ma che io sappia non ne sono state fatte finora tutte quelle applicazioni che più meritano di essere segnalate. Farò queste applicazioni in un prossimo lavoro, ottenendo allora alcuni risultati, che a mio credere, hanno una particolare importanza.

Fisica. — *Dell' azione dell' ozonatore sui gas attivati dai raggi X.* Nota del Socio EMILIO VILLARI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e del loro uso.* Nota del dott. PIETRO BURGATTI [1], presentata dal Socio V. CERRUTI.

Quando un' equazione lineare alle derivate parziali del 2° ordine è ridotta alla forma

$$(0) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0\,,$$

si sa riconoscere, in una maniera molto semplice (Darboux, *Théorie des surfaces*, T. II, Cap. II), se la sua integrazione sia immediatamente ridu-

(1) Mentre questo lavoro stava in corso di stampa, è comparsa nei Comptes rendus del 30 Novembre una Nota del sig. Cotton sopra lo stesso soggetto. Egli ha trovato due invarianti che differiscono da quelli considerati in questa Nota, ma uno di essi coincide con un invariante da me già ottenuto in una Memoria: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali* ecc., pubblicata negli Annali di Matematica del 1895 (Serie 2ª — T. XXIII). Io però non dedussi le conseguenze che ha ora dedotte il sig. Cotton.

cibile alle quadrature. Ma se l' equazione proposta è della forma più generale

$$(1)\quad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=0\,,\qquad (A \text{ o } C \neq 0)$$

il criterio noto non vale più, ed è necessario allora di cimentarsi colle difficoltà che presenta la riduzione alla forma (0) di Laplace, senza sapere a priori se tale riduzione condurrà ad una equazione immediatamente integrabile. Mi è sembrato perciò utile la ricerca d' un criterio facile e generale per riconoscere se un' equazione del tipo (1) sia riducibile ad una forma integrabile con un cambiamento di variabili.

1. Sia proposta l' equazione (1), ove si suppone almeno uno de' coefficienti A e C diverso da zero. Operando il cambiamento di variabili

$$\xi=\xi(x\,,y)\ ,\ \eta=\eta(x\,,y)\,,$$

si trova una nuova equazione lineare

$$(2)\qquad A_1\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2B_1\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+C_1\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+D_1\frac{\partial z}{\partial \xi}+E_1\frac{\partial z}{\partial \eta}+F_1 z=0\,,$$

nella quale i coefficienti hanno le espressioni:

$$(3)\qquad \begin{aligned}
A_1&=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2,\\
B_1&=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y},\\
C_1&=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,\\
D_1&=A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\xi}{\partial x}+E\frac{\partial\xi}{\partial y},\\
E_1&=A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+D\frac{\partial\eta}{\partial x}+E\frac{\partial\eta}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Una espressione formata coi coefficienti dell' equazione data e colle loro derivate si dice un *invariante* quando, operato un cambiamento qualunque di variabili, la medesima espressione formata coi coefficienti della trasformata è uguale alla precedente a meno di un fattore dipendente dalla sola trasformazione. Si giunge alla determinazione di un invariante operando sulle (3) nella maniera qui appresso indicata.

Se diciamo λ_1 e λ_2 le due radici, che supporremo distinte, dell' equazione

$$A\lambda^2-2B\lambda+C=0\,,\quad (A\neq 0)$$

le espressioni di A_1, B_1 e C_1 si possono scrivere così:

$$\begin{aligned}
A_1&=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right),\\
2B_1&=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\right),\\
C_1&=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

od anche

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
A_1 &= A\,.\,U(\xi)\,V(\xi)\,,\\
2B_1 &= A\,\{U(\xi)\,V(\eta) + U(\eta)\,V(\xi)\}\,,\\
C_1 &= A\,.\,U(\eta)\,V(\eta)\,,
\end{aligned}
$$

quando si ponga in generale

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} = U(f)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y} = V(f)\,.$$

Ora, supponendo ad es. $A_1 \neq 0$, dividiamo la seconda e la terza delle (4) per la prima; si trova

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{U(\eta)}{U(\xi)} \cdot \frac{V(\eta)}{V(\xi)}\,, \quad \frac{2\,B_1}{A_1} = \frac{V(\eta)}{V(\xi)} + \frac{U(\eta)}{U(\xi)}\,;$$

quindi

$$(5)\qquad \frac{U(\eta)}{U(\xi)} = \lambda'_1 \quad \text{e} \quad \frac{V(\eta)}{V(\xi)} = \lambda'_2$$

sono le radici dell' equazione

$$A_1\,\lambda'^2 - 2B_1\,\lambda' + C_1 = 0\,.$$

Ciò posto, consideriamo le espressioni di D_1 ed E_1. È facile vedere che si possono scrivere così:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
D_1 &= AV(U(\xi)) + D\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + (E - AV(\lambda_1))\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,,\\
E_1 &= AV(U(\eta)) + D\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + (E - AV(\lambda_1))\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\,,
\end{aligned}
$$

dove in generale $V(U(f))$ indica l' operazione V applicata alla funzione $U(f)$. Ma per le (5)

$$(5')\qquad U(\eta) = \lambda'_1\,U(\xi)\,,$$

quindi l' espressione di E_1 diventa

$$E_1 = A\lambda'_1\,.\,V(U(\xi)) + AV(\lambda'_1)\,.\,U(\xi) + D\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + (E - AV(\lambda_1))\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\,.$$

Eliminando allora $V(U(\xi))$ fra questa e la prima delle (6), si trova

$$D_1\lambda'_1 - E_1 = -AV(\lambda'_1)\,U(\xi) + D\left(\lambda'_1\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + (E - AV(\lambda_1))\left(\lambda'_1\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

Trasportiamo il termine negativo nel primo membro, e notiamo che dalla (5′) sviluppata si trae

$$\lambda'_1\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\,\lambda_1\left(\lambda'_1\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right);$$

in conseguenza di ciò l' equazione diventa

$$(7)\qquad D_1\,\lambda'_1 - E_1 + AV(\lambda'_1)\,U(\xi) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \lambda'_1\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)(D\,\lambda_1 - E + AV(\lambda_1))\,.$$

Ora dalle relazioni

$$\frac{\partial\lambda'_1}{\partial x}=\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\lambda'_1}{\partial y}=\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

si deduce facilmente

$$\mathrm{V}(\lambda'_1)=\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\xi}\mathrm{V}(\xi)+\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\eta}\mathrm{V}(\eta),$$

ossia, per la seconda delle (5),

$$\mathrm{V}(\lambda'_1)=\mathrm{V}(\xi)\left(\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\xi}+\lambda'_2\frac{\partial\lambda'_1}{\partial\eta}\right)=\mathrm{V}(\xi)\,.\,\mathrm{V}_1(\lambda'_1),$$

indicando con V_1 l'operazione $\frac{\partial}{\partial\xi}+\lambda'_2\frac{\partial}{\partial\eta}$. Si vede allora che il termine $\mathrm{AV}(\lambda'_1)\,\mathrm{U}(\xi)$ che comparisce nella (7) è uguale a $\mathrm{AU}(\xi)\,\mathrm{V}(\xi)\,\mathrm{V}_1(\lambda'_1)$, cioè ad $\mathrm{A}_1\,\mathrm{V}_1(\lambda'_1)$; onde la (7) stessa si può scrivere

$$\mathrm{D}_1\lambda'_1-\mathrm{E}_1+\mathrm{A}_1\mathrm{V}_1(\lambda'_1)=\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\lambda'_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)(\mathrm{D}\lambda_1-\mathrm{E}+\mathrm{AV}(\lambda_1)).$$

In modo analogo, introducendo nelle espressione di D_1 ed E_1 l'operazione $\mathrm{U}(\mathrm{V}(f))$ invece della $\mathrm{V}(\mathrm{U}(f))$, si trova questa seconda equazione:

$$\mathrm{D}_1\lambda'_2-\mathrm{E}_1+\mathrm{A}_1\mathrm{U}_1(\lambda'_2)=\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\lambda'_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)(\mathrm{D}\lambda_2-\mathrm{E}+\mathrm{AU}(\lambda_2)).$$

Notando poi che

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}-\lambda'_1\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\mathrm{U}(\eta)}{\mathrm{U}(\xi)}\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\Delta}{\mathrm{U}(\xi)},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}-\lambda'_2\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\mathrm{V}(\eta)}{\mathrm{V}(\xi)}\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\Delta}{\mathrm{V}(\xi)},$$

ove Δ è il determinante funzionale di ξ ed η rispetto ad x ed y, le due equazioni precedenti si scrivono in modo sviluppato come segue:

$$(8)\quad\begin{aligned}&\mathrm{D}_1\lambda'_1-\mathrm{E}_1+\mathrm{A}_1\lambda'_1\frac{\partial\log\lambda'_1}{\partial\xi}+\mathrm{C}_1\frac{\partial\log\lambda'_1}{\partial\eta}=\\&\qquad=\frac{\Delta}{\mathrm{U}(\xi)}\left(\mathrm{D}\lambda_1-\mathrm{E}+\mathrm{A}\lambda_1\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial x}+\mathrm{C}\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial y}\right)\\&\mathrm{D}_1\lambda'_2-\mathrm{E}_1+\mathrm{A}_1\lambda'_2\frac{\partial\log\lambda'_2}{\partial\xi}+\mathrm{C}_1\frac{\partial\log\lambda'_2}{\partial\eta}=\\&\qquad=\frac{\Delta}{\mathrm{V}(\xi)}\left(\mathrm{D}\lambda_2-\mathrm{E}+\mathrm{A}\lambda_2\frac{\partial\log\lambda_2}{\partial x}+\mathrm{C}\frac{\partial\log\lambda_2}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

In conseguenza di queste formule, le espressioni

$$\mathrm{I}_1=\mathrm{D}\lambda_1-\mathrm{E}+\mathrm{A}\lambda_1\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial x}+\mathrm{C}\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial y}$$

$$\mathrm{I}_2=\mathrm{D}\lambda_2-\mathrm{E}+\mathrm{A}\lambda_2\frac{\partial\log\lambda_2}{\partial x}+\mathrm{C}\frac{\partial\log\lambda_2}{\partial y}$$

si diranno rispettivamente *1° e 2° invariante parziale.*

Un vero e proprio invariante si ha invece nell' espressione $A I_1 I_2$: infatti, moltiplicando membro a membro le (8) e notando che $U(\xi)\, V(\xi) = \frac{A_1}{A}$, si trova

$$(9) \qquad A_1 I'_1 I'_2 = \Delta^2 . A I_1 I_2 .$$

Intanto dalle (8) si deduce il teorema:

Se una equazione differenziale del tipo (1) *ha gl' invarianti parziali diversi da zero, anche tutte le trasformate che si possono ottenere con cambiamento di variabili hanno gli stessi invarianti diversi da zero; se invece ha uno o due degli invarianti parziali uguali a zero, anche tutte le trasformate hanno uno o due invarianti parziali uguali a zero.*

Notiamo che qui s' intende parlare di trasformate che conservano la forma generale (1).

2. Vediamo ora quale utilità presenta la considerazione di questi invarianti.

Indichiamo con $\Pi(z)$ il primo membro dell' equazione (1), ove si suppone $F = 0$, onde giungere a risultati più notevoli. È facile vedere che l' equazione proposta si può scrivere nelle due maniere seguenti:

$$(10) \qquad \Pi(z) = A . V(U(z)) + DU(z) - I_1 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(10') \qquad \Pi(z) = A . U(V(z)) + DV(z) - I_2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

Orbene, cominciamo a supporre che uno degli invarianti parziali sia nullo, ad es. $I_1 = 0$; l' equazione diventa

$$A . V(U(z)) + DU(z) = 0.$$

Di qui risulta che, se α è una soluzione di $U(z) = 0$, una funzione arbitraria di α è soluzione della proposta; quindi si può dire: *Un' equazione del tipo* (1) ($F = 0$) *che ha uno degli invarianti parziali nullo, ammette per soluzione una funzione arbitraria di una soluzione di* $U(z) = 0$ *o* $V(z) = 0$. La sua completa integrazione poi si riduce all' integrazione successiva delle due equazioni del 1° ordine

$$AV(z') + Dz' = 0 \ , \quad U(z) = z' .$$

Ma una maniera migliore per eseguirne l' integrazione si vedrà nel numero seguente.

Supponiamo adesso che ambedue gli invarianti parziali siano nulli, cioè $I_1 = I_2 = 0$; allora l' equazione proposta si riduce alle due forme seguenti:

$$AV(U(z)) + DU(z) = 0$$
$$AU(V(z)) + DV(z) = 0 .$$

Di qui risulta, che se α e β sono rispettivamente soluzioni dell' equazioni $U(z)=0$ e $V(z)=0$, $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$, ove φ e ψ sono due funzioni arbitrarie, sono soluzioni dell' equazione proposta, e per conseguenza

$$z=\varphi(\alpha)+\psi(\beta)$$

è il suo integrale generale. Onde si conclude: *Se una equazione del tipo* (1) $(F=0)$ *ha ambedue gl' invarianti parziali nulli, essa ammette l' integrale generale* $z=\varphi(\alpha)+\psi(\beta)$, essendo α e β rispettivamente soluzioni di $U(z)=0$ e $V(z)=0$; quindi la sua integrazione è ridotta a quella di equazione del 1° ordine.

3. Per veder bene quando e come l' integrazione della (1) sia riducibile all' integrazione di equazioni del primo ordine, si può anche ragionare nella maniera seguente. Operiamo sulla (1), supposto sempre $F=0$, un cambiamento di variabili definito dalle relazioni

$$\xi=\xi(x,y)\ ,\quad \eta=\eta(x,y)\ ;$$

si ottiene la nuova equazione (2) $(F_1=0)$, ove i coefficienti hanno le espressioni (3). Ma essendo

$$D_1=\Pi(\xi)\quad \text{ed}\quad E_1=\Pi(\eta)\ ,$$

noi possiamo, per le cose già dette, porre questi coefficienti sotto la forma seguente:

$$D_1=A\,.\,V(U(\xi))+DU(\xi)-I_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\,,$$

$$E_1=A\,.\,U(V(\eta))+DV(\eta)-I_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\,.$$

Orbene prendiamo ξ e η in guisa che sia

$$U(\xi)=0\ ,\quad V(\eta)=0\ ,\quad (\lambda_1 \neq \lambda_2);$$

allora

$$A_1=0\ ,\quad 2B_1=AV(\xi)\,U(\eta)\ ,\quad C_1=0$$

$$D_1=-I_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\ ,\quad E_1=-I_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\,,$$

e l' equazione trasformata diventa

$$AV(\xi)\,U(\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}-I_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial\xi}-I_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial\eta}=0\,.$$

Di qui risulta:

I. Se l' equazione proposta ha uno de' suoi invarianti parziali nullo, essa si riduce, col cambiamento di variabili adoperato, ad una delle forme

$$(11)\qquad \begin{aligned} &AV(\xi)\,U(\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}-I_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial\eta}=0\\ &AV(\xi)\,U(\eta)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}-I_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial\xi}=0\,, \end{aligned}$$

che sono immediatamente riducibili alle quadrature.

II. Se l' equazione proposta ha gl' invarianti parziali ambedue nulli, essa si riduce, col cambiamento di variabili adoperato, alla forma semplice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 \, , \tag{12}$$

ed ammette quindi l' integrale generale $\varphi(\xi) + \psi(\eta)$, come abbiam visto nel numero precedente.

III. Le condizioni $I_1 = 0$ od $I_2 = 0$ e $I_1 = I_2 = 0$ sono rispettivamente necessarie e sufficienti affinchè l' equazione proposta sia riducibile alle forme (11) e (12).

4. Poniamo nell' equazione data (1) $z = kz'$; essa diventa

$$A \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z'}{\partial x \, \partial y} + C \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + D' \frac{\partial z'}{\partial x} + E' \frac{\partial z'}{\partial y} + F' z' = 0 \, ,$$

ove A, B e C sono gli stessi de' precedenti, mentre

$$D' = 2A \frac{\partial \log k}{\partial x} + 2B \frac{\partial \log k}{\partial y} + D \, ,$$

$$E' = 2C \frac{\partial \log k}{\partial y} + 2B \frac{\partial \log k}{\partial x} + E \, .$$

Calcolando ora per questa nuova equazione gl' invarianti parziali, che diremo I_1', I_2', si trova facilmente

$$I'_1 = 2(A \lambda_1 - B) \frac{\partial \log k}{\partial x} + 2(B \lambda_1 - C) \frac{\partial \log k}{\partial y} + I_1 \, ,$$

$$I'_2 = 2(A \lambda_2 - B) \frac{\partial \log k}{\partial x} + 2(B \lambda_2 - C) \frac{\partial \log k}{\partial y} + I_2 \, .$$

Se k è tale che I_1' ed I_2' risultino nulli, l'equazione trasformata ha gl'invarianti parziali nulli ed il coefficiente di z diverso da zero, quindi col cambiamento di variabili adoperato nel numero precedente si potrà ridurre alla forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} + \lambda z = 0 \, . \tag{13}$$

Di qui risulta: *Un' equazione del tipo* (1) *ad invarianti parziali diversi da zero è riducibile alla forma* (13) *mediante una sostituzione seguita da un cambiamento di variabili nel solo caso che l' equazioni* $I_1' = 0$ *ed* $I_2' = 0$ *abbiano una soluzione* k *comune.*

Aggiungiamo per ultimo l' osservazione seguente. È sempre possibile mediante una sostituzione $z = kz'$, rendere l' equazione proposta ad invarianti parziali uguali. Basta infatti prendere per k una soluzione dell'equazione $I_1' - I_2' = 0$.