ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Matematica. — *Sull'area delle superficie curve.* Nota di GIAN ANTONIO MAGGI, presentata dal Socio DINI.

Sono ben note le obbiezioni mosse da *Schwarz* all'antica definizione di area d'una superficie curva ([1]), in seguito alle quali *Hermite* enunciò quella ch'è ora, dai migliori trattati, generalmente adottata ([2]). Con questa è abbandonata ogni considerazione di superficie poliedrica iscritta nella superficie; mentre ragioni d'armonia colla definizione della lunghezza d'un arco di linea, come anche di quella dell'area d'una figura piana, e del volume di un solido, possono lasciar desiderare che vi si ritorni: salvo l'aggiunta di quelle condizioni restrittive, concernenti l'iscrizione, di cui *Schwarz* rileva la necessità. Tanto più se si potrà far a meno d'invocare ogni elemento estraneo alla superficie: qual'è il piano di proiezione, che introduce la nuova definizione, e bisogna poi dimostrare come, mutandolo, l'area resta sempre la stessa.

Una definizione che risponde a tale concetto è questa: « Area d'una superficie curva, dotata in ogni punto di normale, variabile, da punto a punto, con continuità, è il limite dell'area d'una superficie poliedrica iscritta, collo svanire del raggio d'un cerchio capace di contenere le singole faccie, sotto la condizione che, insieme con questo raggio, svanisca uniformemente l'angolo formato dalla perpendicolare al piano d'ogni faccia colla normale alla superficie in un punto qualsivoglia del segmento sotteso ».

Questa definizione richiede però la dimostrazione preliminare che in una superficie, quale l'abbiamo supposta, è sempre possibile iscrivere una successione infinita di superficie poliedriche, corrispondenti a due successioni correlative di angoli e di cerchi, ambedue infinitamente decrescenti: in tal modo che, purchè le faccie di una superficie poliedrica capiscano in un cerchio, l'angolo formato dalla perpendicolare al piano delle singole faccie colla normale alla superficie in in punto qualsivoglia del segmento sotteso riesca minore dell'angolo relativo.

Dimostrato questo, si vede subito che l'area delle superficie poliedriche iscritte in discorso, collo svanire del raggio di un cerchio capace di com-

([1]) Hermite, *Cours à la Faculté des Sciences*, 2ª ediz., Paris, 1883. — Schwarz, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1891. (*Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe*, pag. 309 e 369).

([2]) Hermite, *Cours à la Faculté des Sciences*, 3ª ediz., Paris, 1887. — E. Picard, *Traité d'Analyse*, Paris, 1891. — F. d'Arcais, *Corso di calcolo infinitesimale*, Padova, 1891-94. — E. Pascal, *Lezioni di calcolo infinitesimale*. Milano, 1895. — Citerò anche, per chi abbia famigliare il Calcolo Geometrico, la definizione del prof. G. Peano, — *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Torino, 1893 — che, partendo da un principio diverso, ritrova nei concetti di tale calcolo l'analogia con quella di lunghezza d'un arco.

prendere le singole faccie, ha un limite, puramente dipendente dalla superficie curva considerata. Il quale, per ogni pezzo abbastanza ristretto perchè ogni punto di un certo piano, compreso dalla proiezione del contorno sul piano medesimo, o appartenente ad essa, sia proiezione d' un sol punto, e l' angolo formato dalla normale in un punto qualunque colla perpendicolare al piano non raggiunga un retto, risulta

$$\int_\sigma \frac{d\sigma}{\cos\lambda};$$

dove λ rappresenta la grandezza di quell' angolo, pel punto generico, σ quella dell' area della proiezione, e l' integrale s' intende esteso alla proiezione medesima ([1]).

Tale dimostrazione emerge dalla ricerca seguente, che conduce a stabilire un' assai semplice condizione generale, sufficiente perchè, collo svanire del raggio d' un cerchio capace di contenere le singole faccie d' una superficie poliedrica iscritta in una superficie curva, svanisca uniformemente l' angolo formato dalla perpendicolare al loro piano colla normale alla superficie in un punto qualunque del segmento sotteso; ch' è appunto quanto dire perchè una successione di superficie poliedriche iscritte riesca della specie suddetta. Per modo che, soddisfatta quella condizione, il limite dell' area della superficie iscritta esisterà, e sarà ciò che, per definizione, chiamiamo area della superficie curva; ed altrimenti potrà darsi che l' area delle superficie iscritte non abbia limite determinato, o l' abbia infinito, conformemente agli esempii addotti da *Schwarz*.

Sia la superficie analiticamente rappresentata dalle equazioni

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{1}$$

e i vertici della faccia generica d' una superficie poliedrica iscritta (che potremo sempre supporre a faccie triangolari) abbiano per coordinate (intendiamo coordinate cartesiane ortogonali)

$$x_0, y_0, z_0, \quad x_0 + \Delta_1 x, y_0 + \Delta_1 y, z_0 + \Delta_1 z, \quad x_0 + \Delta_2 x, y_0 + \Delta_2 y, z_0 + \Delta_2 z,$$

rispettivamente corrispondenti ai valori dei parametri

$$u_0, v_0, \qquad u_0 + \Delta_1 u, v_0 + \Delta_1 v, \qquad u_0 + \Delta_2 u, v_0 + \Delta_2 v.$$

[1] Basta osservare che si ha identicamente:

$$\sum \frac{\Delta\sigma}{\cos\lambda'} = \sum \frac{\Delta\sigma}{\cos\bar{\lambda}} + \sum \left(\frac{1}{\cos\lambda'} - \frac{1}{\cos\bar{\lambda}}\right)\Delta\sigma;$$

e, inteso che $\Delta\sigma$ indichi la grandezza dell'area della proiezione della faccia generica, λ' e $\bar{\lambda}$ rappresentino gli angoli che, colla perpendicolare al piano di proiezione, formano la perpendicolare al piano della faccia e la normale alla superficie in un punto qualunque del segmento sotteso, e le sommatorie abbraccino tutte le faccie, la seconda del secondo membro, collo svanire del raggio di un cerchio capace di contenere le singole faccie, o le loro proiezioni, *per la supposta successione di superficie*, tende a zero, mentre la prima tende al suddetto integrale, e quella del primo membro all'area, come fu definita.

Indicati con $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ il quadrato e i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y & \Delta_1 z \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y & \Delta_2 z \end{vmatrix},$$

sarà $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ la misura dell'area della faccia in discorso, e i coseni di direzione, α, β, γ, della perpendicolare al suo piano, volta nel debito senso, saranno dati da

$$\alpha = \frac{\boldsymbol{\Lambda}}{\boldsymbol{A}}, \qquad \beta = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{A}}, \qquad \gamma = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{A}}. \tag{2}$$

Ora, in virtù dell'ipotesi dell'esistenza della normale, variabile con continuità, si ha

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_i\, x = \left(\frac{dx}{du}\right)_0 \Delta_i\, u + \left(\frac{dx}{dv}\right)_0 \Delta_i\, v + \xi_i \\ &\lim_{\mathrm{R}_i=0} \frac{\xi_i}{\mathrm{R}_i} = 0, \quad \mathrm{R}_i = \sqrt{\mu \Delta_i\, u^2 + \nu \Delta_i\, v^2} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2\ ) \tag{3}$$

dove l'indice o indica il valore corrispondente al vertice (x_0, y_0, z_0), e μ, ν sono fattori fissi, introdotti per stabilire, se occorre, l'omogeneità rispetto alle unità di misura relative ai due parametri u, v; e le formole analoghe per $\Delta_i\, y$, $\Delta_i\, z$.

Indichiamo con A^2, L, M, N il quadrato e i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dz}{du} \\ \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dz}{dv} \end{vmatrix};$$

per modo che i coseni di direzione, a, b, c, della normale alla superficie nel punto generico, volta nel debito senso, saranno dati da

$$a = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}, \qquad b = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}, \qquad c = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}.$$

Come pure, per brevità di scrittura, poniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix}.$$

Per (3) troviamo subito

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{L}_0\, \Delta + \delta\boldsymbol{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{M} = \mathrm{M}_0\, \Delta + \delta\boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{N} = \mathrm{N}_0\, \Delta + \delta\boldsymbol{N},$$

dove, indicando con δ una qualunque delle $\delta\boldsymbol{\Lambda}$, $\delta\boldsymbol{M}$, $\delta\boldsymbol{N}$, si ha

$$\lim_{\mathrm{R}=0} \frac{\delta}{\mathrm{R}^2} = 0, \qquad \mathrm{R} = \sqrt{\mu\,(\Delta_1\, u^2 + \Delta_2\, u^2) + \nu\,(\Delta_1\, v^2 + \Delta_2\, v^2)}. \tag{4}$$

Quindi

$$(5)\quad A^2 = A_0^2 \Delta^2 \left\{ 1 + 2\frac{L_0\,\delta A + M_0\,\delta M + N_0\,\delta N}{A_0^2 \Delta} + \frac{\delta A^2 + \delta M^2 + \delta N^2}{A_0^2 \Delta^2} \right\}.$$

In conseguenza di che, se supponiamo che, almeno per R minore di un certo termine, si mantenga

$$(6)\qquad \frac{\Delta}{R^2} > K,$$

indicando con K un numero positivo assegnabile, fisso, si avrà anche

$$A = A_0 \Delta + \delta A,$$

dove A_0 è supposto positivo, come pure Δ (ciò che torna scegliere opportunamente fra i due vertici a cui si fanno corrispondere i numeri 1 e 2), e δA, posto per δ, soddisfa a (4).

Ma, in virtù di queste relazioni, si ha, per (2),

$$\alpha = \frac{L_0 + \frac{\delta A}{\Delta}}{A_0 + \frac{\delta A}{\Delta}}, \qquad \beta = \frac{M_0 + \frac{\delta M}{\Delta}}{A_0 + \frac{\delta A}{\Delta}}, \qquad \gamma = \frac{N_0 + \frac{\delta N}{\Delta}}{A_0 + \frac{\delta A}{\Delta}}.$$

E di qui scaturisce, nella premessa ipotesi che si verifichi (6),

$$\lim_{R=0} \alpha = a_0, \qquad \lim_{R=0} \beta = b_0, \qquad \lim_{R=0} \gamma = c_0;$$

cioè collo svanire del raggio d' un cerchio capace di contenere la faccia considerata, restando fisso un vertice, la perpendicolare al suo piano avrà per limite la normale alla superficie in quel vertice.

Rileviamo che ciò si può affermare subordinatamente alla condizione (6): la quale si può esprimere col dire che, chiamato uno degli incrementi arbitrarii $\Delta_i u$, $\Delta_i v$ evanescente di 1° ordine, e intesi gli altri dello stesso, o d' ordine superiore, sia Δ evanescente di 2° ordine (1).

Il vertice suddetto, rappresentato fin qui con (x_0, y_0, z_0), è un punto qualunque della superficie. Si vede, risalendo la successione delle formole considerate, che uno stesso cerchio servirà, comunque si scelga quel punto, se a K si assegnerà un valore fisso, e ξ_i e le analoghe, collo svanire di R_i, svaniranno uniformemente. Ciò che avrà luogo nell' ipotesi che $x\ (u, v)$ $y\ (u, v)$, $z\ (u, v)$ ammettano derivate seconde finite e continue: e quindi, a maggior ragione, se la superficie possiede in ogni punto curvatura finita, variabile con continuità.

Finalmente, poichè la normale è supposta variabile con continuità da punto a punto, l' angolo formato dalle normali a due punti d' un segmento

(1) Espressione, che intendiamo puramente equivalente alla condizione (6).

svanisce uniformemente (e quindi svaniscono uniformemente le differenze dei coseni di direzione omologhi), collo svanire del raggio d'un cerchio capace di contenere le faccie che tagliano i singoli segmenti. Donde si conclude, senz'altro, che, nelle suddette ipotesi, collo svanire del raggio d'un cerchio capace di contenere le singole faccie, svanirà uniformemente l'angolo formato dalla perpendicolare al loro piano colla normale alla superficie in un punto qualsivoglia del segmento sotteso.

Facciamo un'applicazione di questi risultati all'esempio di *Schwarz* (1). Le equazioni (1) sono, in questo caso,

$$(7) \qquad x = r\cos u, \quad y = r\sin u, \quad z = v, \qquad 0 \lesseqgtr u \lesseqgtr 2\pi, \quad 0 \lesseqgtr v \lesseqgtr h,$$

E i vertici delle faccie della superficie iscritta sono dati da

$$u = \frac{2p\pi}{m} \qquad v = \frac{2qh}{n} \qquad p = 0, 1, 2, \cdots m-1 \quad q = 0, 1, 2, \cdots n$$

$$u = \frac{(2p+1)\pi}{m} \qquad v = \frac{(2q+1)h}{n} \qquad p = 0, 1, 2, \cdots m-1 \quad q = 0, 1, 2, \cdots n-1$$

Quindi, per una faccia:

$$u_0 = \frac{(2p+1)\pi}{m}, \quad v_0 = \frac{(2q+1)h}{n}; \quad u_1 = \frac{2p\pi}{m}, \quad v_1 = \frac{2qh}{n};$$

$$u_2 = \frac{2(p+1)\pi}{m}, \qquad v_2 = \frac{2qh}{n};$$

oppure

$$u_0 = \frac{2p\pi}{m}, \quad v_0 = \frac{2qh}{n}; \quad u_1 = \frac{(2p-1)\pi}{m}, \quad v_1 = \frac{(2q-1)h}{n};$$

$$u_2 = \frac{(2p+1)\pi}{m}, \qquad v_2 = \frac{(2q-1)h}{n};$$

per modo che, in in ogni caso,

$$\Delta_1 u = -\frac{\pi}{m}, \quad \Delta_1 v = -\frac{h}{n}, \quad \Delta_2 u = \frac{\pi}{m}, \quad \Delta_2 v = -\frac{h}{n}, \quad \Delta = \frac{2\pi h}{mn}.$$

E di qui si conchiude, per quanto precede, che l'area della superficie poliedrica iscritta secondo la legge in discorso avrà per limite quella che, per definizione, compete alla superficie (cilindrica circolare) rappresentata dalle (7), se m ed n cresceranno infinitamente, mantenendosi dello stesso ordine: il che vuol dire semplicemente che il rapporto $\frac{m}{n}$ si manterrà compreso fra due numeri positivi assegnabili.

Che se si vogliono indagare i risultati di ipotesi diverse da questa, basta applicare la (5), la quale diventa

$$A^2 = \frac{4\pi^2 h^2 r^2}{m^2 n^2}\left(1 + k\frac{n^2}{m^4} + \varepsilon\right),$$

(1) V. la citata 2ª ediz. del *Cours* di Hermite.

dove k è inferiore ad un termine assegnabile, ed ε svanisce col crescere infinitamente di $m, n,$ con qualsiasi legge.

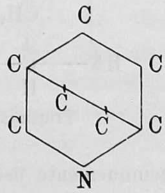
Di qui le faccie essendo in numero di $2mn$, e tutte eguali, si ha per area della superficie iscritta

$$2\pi hr \sqrt{1 + k\frac{n^2}{m^4} + \varepsilon}\,.$$

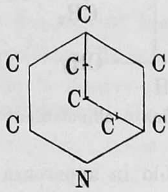
E, posto $n = \varrho\, m^\sigma$, se ne ricava subito che il limite, col crescere infinitamente di m, sarà $2\pi hr$, se $\sigma = 1$, dipendente da ϱ, se $\sigma = 2$, infinito, se $\sigma > 2$; che sono le ricordate conclusioni di *Schwarz*.

Chimica. — *Esperienze dirette a determinare la costituzione della tropanina e della granatanina per via crioscopica* [1]. Nota di Felice Garelli, presentata a nome del Socio G. Ciamician.

In una serie di lavori pubblicati in questi due ultimi anni, Ciamician e Silber [2] hanno posto in rilievo la grande analogia che esiste fra gli alcaloidi del melagrano e quelli della serie tropinica: onde furono indotti ad ammettere vi sia fra essi anche somiglianza di struttura. I due schemi fondamentali che, secondo Merling, Ciamician e Silber, dovrebbero esistere in tutti i numerosi composti delle due serie, sarebbero i seguenti:



Schema delle basi tropiniche



Schema delle basi granataniche

Il prof. Ciamician mi ha incaricato di esaminare se, col mezzo di ben dirette determinazioni crioscopiche, si poteva trovare qualche fatto nuovo che portasse un contributo alla soluzione del problema ch' egli si è proposto.

Una simile ricerca non mi parve prematura, giacchè ormai con gran numero di esempi ho provato che l' analogia di costituzione fra un solvente e un corpo sciolto è uno dei primi fattori nell' indurre fra essi formazione di

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Bologna, dicembre, 1896.

[2] Gazz. Chim. ital., vol. XXII, II, pag. 514; vol. XXIV, I, pag. 116, e II, pag. 350; vol. XXVI. II, pag. 141 e 160.