ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII.

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Meccanica. — *Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

1. Abbiamo mostrato, in una Nota [1] presentata, contemporaneamente alla presente, a codesta R. Accademia, come si può pervenire alla integrazione delle equazioni del moto vibratorio per un corpo elastico isotropo. Nelle formole che abbiamo stabilito, i valori di u, v, w, nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) dello spazio lineare (x, y, z, t), sono determinati in funzione dei valori che u, v, w e le derivate di u, v, w, rapporto ad x, y, z, t, prendono su due determinate porzioni di una varietà Σ a tre dimensioni dello stesso spazio (x, y, z, t) ed in queste formole le derivate, rispetto ad x, y, z, compaiono aggruppate nelle espressioni di $\theta, \varpi, \chi, \varrho$. Mostreremo ora come si possono stabilire delle altre formole in cui le derivate di u, v, w rapporto ad x, y, z compaiono raggruppate come nelle componenti delle tensioni.

2. Scriviamo perciò le nostre equazioni nella forma seguente:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial t_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{13}}{\partial z} = \mathrm{X} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial t_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{23}}{\partial z} = \mathrm{Y} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial t_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{33}}{\partial z} = \mathrm{Z} \end{cases}$$

con

$$(2)\qquad \begin{cases} -t_{11} = (b^2 - 2a^2)\theta + 2a^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad -t_{12} = -t_{21} = a^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\ -t_{22} = (b^2 - 2a^2)\theta + 2a^2 \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad -t_{23} = -t_{32} = a^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ -t_{33} = (b^2 - 2a^2)\theta + 2a^2 \dfrac{\partial w}{\partial z}, \quad -t_{31} = -t_{13} = a^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Se indichiamo ancora con S_4 una porzione dello spazio lineare (x, y, z, t) limitata da una varietà Σ a tre dimensioni soggetta alle solite condizioni generali, con u', v', w' un sistema di tre funzioni regolari in S_4 come u, v, w, distinguiamo con un accento le quantità che dipendono da u', v', w', ed in-

[1] *Sulla integrazione delle equazioni della elasticità.*

dichiamo con n la direzione positiva della normale a Σ diretta verso l'interno di S_4, possiamo facilmente stabilire la formola fondamentale seguente:

$$(3)\int_{S_4}(Xu'+Yv'+Zw')\,dS_4+\int_{\Sigma}\left\{\left(L+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u'+\left(M+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v'+\left(N+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w'\right\}d\Sigma$$

$$-\int_{S_4}(X'u+Y'v+Z'w)\,dS_4-\int_{\Sigma}\left\{\left(L'+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u+\left(M'+\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v+\left(N'+\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w\right\}d\Sigma=0$$

dove:

$$(4)\quad\begin{cases} L=t_{11}\dfrac{dx}{dn}+t_{12}\dfrac{dy}{dn}+t_{13}\dfrac{dz}{dn}, \quad M=t_{21}\dfrac{dx}{dn}+t_{22}\dfrac{dy}{dn}+t_{23}\dfrac{dz}{dn}, \\ N=t_{31}\dfrac{dx}{dn}+t_{32}\dfrac{dy}{dn}+t_{33}\dfrac{dz}{dn}. \end{cases}$$

Notiamo ancora che se $\varphi(t, x, y, z)$ indica un integrale particolare dell'equazione

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

e poniamo:

$\varphi_1=\varphi[b(t_1-t), x_1-x, y_1-y, z_1-z]$, $\varphi_2=\varphi[a(t_1-t), x_1-x, y_1-y, z_1-z]$,

dove (t_1, x_1, y_1, z_1) sono le coordinate di un punto fisso del nostro spazio a quattro dimensioni, saranno:

$$(6)\quad\begin{cases} u_1=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}, & v_1=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}, & w_1=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ u_2=0, & v_2=-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}, & w_2=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \\ u_3=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}, & v_3=0, & w_3=-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} \\ u_4=-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}, & v_4=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & w_4=0 \end{cases}$$

quattro sistemi di integrali particolari delle equazioni (1) quando si ponga $X=Y=Z=0$.

3. Prenderemo per φ la funzione

$$(7)\qquad \varphi=\frac{t^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

sicchè risulti:

$$\varphi_1=\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r,\quad \varphi_2=\frac{a^2(t_1-t)^2}{r}+r,\quad r=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}$$

ed applicheremo la formola (3), dapprima, al sistema di funzioni u, v, w,

al sistema u_1, v_1, w_1, corrispondente alla funzione φ data dalla (7), ed allo spazio $S'_{4,b}$ limitato dalla varietà conica C

$$\frac{a(t_1-t)}{r}-1=0\,, \tag{8}$$

dalla varietà cilindrica c

$$r=\varepsilon \tag{9}$$

e dalla porzione Σ'_b di una varietà Σ a tre dimensioni soggetta alla condizione di essere incontrata in un solo punto da ogni parallela all'asse t e di non essere toccata dalla parallela a quest'asse condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1). Supporremo inoltre che in $S'_{4,b}$ sia sempre $t_1 > t$ e chiameremo Σ''_b, Σ'''_b le porzioni di C e c che insieme a Σ'_b limitano completamente $S'_{4,b}$.

Prima di passare a tirare le nostre conseguenze dalla formola (3) osserveremo che, corrispondentemente alle funzioni:

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{x-x_1}{r}\,, \quad v_1=\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{y-y_1}{r}\,,\\ w_1 &= \left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{z-z_1}{r}\end{aligned}\right. \tag{10}$$

si ha, su di una varietà di rotazione intorno alla parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t), come è il caso appunto delle varietà C e c:

$$\left\{\begin{aligned} L_1 &= -2(b^2-2a^2)\frac{1}{r}\frac{dx}{dn}-2a^2\frac{2b^2(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dx}{dn}\\ M_1 &= -2(b^2-2a^2)\frac{1}{r}\frac{dy}{dn}-2a^2\frac{2b^2(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dy}{dn}\\ N_1 &= -2(b^2-2a^2)\frac{1}{r}\frac{dz}{dn}-2a^2\frac{2b^2(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dz}{dn}\,.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

La (3) nel nostro caso si scriverà intanto

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{S'_{4,b}}(Xu_1+Yv_1+Zw_1)dS'_{4,b}+\int_{\Sigma'_b+\Sigma''_b+\Sigma'''_b}\left\{\left(L+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u_1+\left(M+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v_1+\left(N+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w_1\right\}d\Sigma_b\\ &-\int_{\Sigma'_b+\Sigma''_b+\Sigma'''_b}\left\{\left(L_1+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u+\left(M_1+\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v+\left(N_1+\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w\right\}d\Sigma_b=0.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Su Σ''_b si ha:

$$u_1=v_1=w_1=0$$

e per le (11)

$$L_1+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}=\frac{4a^2}{r}\frac{dx}{dn}\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]-2b^2\frac{x-x_1}{r}\left[\frac{dr}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dt}{dn}\right]=0.$$

per essere

$$\frac{dr}{dn}=-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\,,\quad \frac{dt}{dn}=-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\,.$$

Similmente si troverebbe:

$$M_1+\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}=0\,,\quad N_1+\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}=0\,,$$

sicchè ne viene che l'insieme degli integrali estesi a Σ_b'' che compaiono in (12) si riduce a zero identicamente.

L'insieme degli integrali estesi a Σ_b''', osservando che su c è $\frac{dt}{dn}=0$, $\frac{dr}{dn}=1$, si riduce, invece, a

$$\int_{\Sigma_b'''}(\mathrm{L}u_1+\mathrm{M}v_1+\mathrm{N}w_1)\,d\Sigma_b''' - \int_{\Sigma_b'''}(\mathrm{L}_1u+\mathrm{M}_1v+\mathrm{N}_1w)\,d\Sigma_b''' =$$

$$-(b^2-2a^2)\int_{\Sigma_b'''}\theta\frac{d}{dr}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\right]d\Sigma_b''' - 2a^2\int_{\Sigma_b'''}\left(\frac{du}{dr}\frac{dx}{dr}+\frac{dv}{dr}\frac{dy}{dr}+\frac{dw}{dr}\frac{dz}{dr}\right)\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]d\Sigma_b'''$$

$$+2(b^2-2a^2)\int_{\Sigma_b'''}\left(u\frac{dx}{dr}+v\frac{dy}{dr}+w\frac{dz}{dr}\right)\frac{d\Sigma_b'''}{r}+2a^2\int_{\Sigma_b'''}\frac{2b^2(t_1-t)^2}{r^3}\left(u\frac{dx}{dr}+v\frac{dy}{dr}+w\frac{dz}{dr}\right)d\Sigma_b'''.$$

Facendo impiccolire ε indefinitamente si trova subito:

$$(14)\quad\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon=0}\displaystyle\int_{\Sigma_b'''}\theta\frac{d}{dr}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\right]d\Sigma_b''' = -4\pi b^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\\ \lim\limits_{\varepsilon=0}\displaystyle\int_{\Sigma_b'''}\left(u\frac{dx}{dr}+v\frac{dy}{dr}+w\frac{dz}{dr}\right)\frac{d\Sigma_b'''}{r}=0.\end{cases}$$

Per trovare il limite degli altri due integrali cominciamo col dire che noi supponiamo u, v, w funzioni finite e continue insieme alle derivate parziali del primo e del secondo ordine rispetto a tutte le variabili x, y, z, t anche nella porzione del nostro spazio a quattro dimensioni limitato da C, Σ e c in cui è verificata la condizione $r \leq \varepsilon$. In questa ipotesi, indicando semplicemente con u i valori che questa funzione acquista su Σ_b'', si potrà scrivere

$$u = u(x_1, y_1, z_1, t)$$
$$+r\left[\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial x_1}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial y_1}\frac{dy}{dr}+\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial z_1}\frac{dz}{dr}\right]+\mathrm{A}r^2$$

A essendo una quantità finita. In virtù della formola testè scritta si avrà:

$$\int_{\Sigma_b'''}\frac{du}{dr}\frac{dx}{dr}\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]d\Sigma_b''' =$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon^2\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{\varepsilon^2}\right]dt\int_{\omega}\frac{dx}{dr}\left[\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial y_1}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial y_1}\frac{dy}{dr}+\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial z_1}\frac{dz}{dr}+2\mathrm{A}\varepsilon\right]d\omega$$

essendo ω la superficie di una sfera a tre dimensioni di raggio uno e t_0 il valore di t che corrisponde alla intersezione di Σ con la parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1). Quindi, poichè:

$$\int_\omega \frac{dx}{dr}\,d\omega = \int_\omega \frac{dy}{dr}\,d\omega = \int_\omega \frac{dz}{dr}\,d\omega = \int_\omega \frac{dz}{dr}\frac{dy}{dr}\,d\omega = \int_\omega \frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}\,d\omega = \int_\omega \frac{dz}{dr}\frac{dx}{dr}\,d\omega = 0,$$

$$\int_\omega \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 d\omega = \int \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 d\omega = \int \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 d\omega = \frac{4\pi}{3},$$

risulta subito

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma_b'''} \frac{du}{dr}\frac{dx}{dr}\left[1 - \frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right] d\Sigma_b''' = -\frac{4\pi b^2}{3}\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2 \frac{\partial u(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial x_1}\,dt.$$

Se applichiamo questi ragionamenti a ciascuna delle parti che compongono i due integrali che compariscono in (13) e di cui cerchiamo i limiti, si trovano facilmente le due formole:

$$(15)\left\{\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma_b'''} \left(\frac{du}{dr}\frac{dx}{dr} + \frac{dv}{dz}\frac{dy}{dz} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dr}\right)\left[1 - \frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right] d\Sigma_b''' = -\frac{4\pi b^2}{3}\int_{t_1}^{t_1} (t_1-t)^2\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,dt \\ &\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma_b'''} \frac{2b^2(t_1-t)^2}{r^3}\left(u\frac{dx}{dr} + v\frac{dy}{dr} + w\frac{dz}{dr}\right) d\Sigma_b''' = \frac{8\pi b^2}{3}\int_{t_0}^{t_1} (t_1-t)^2\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,dt. \end{aligned}\right.$$

Riunendo questi risultati possiamo dunque concludere che l'insieme degli integrali estesi a Σ_b'', quando $\varepsilon = 0$, si riduce a

$$(16) \qquad 4\pi b^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\,\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,dt$$

per cui, se indichiamo con $S_{4,b}$ e Σ_b ciò che diventano $S'_{4,b}$ e Σ'_b quando $\varepsilon = 0$, potremo scrivere la formola

$$(17)\quad 4\pi b^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\,\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,dt = -\int_{S_{4,b}} (Xu_1 + Yv_1 + Zw_1)\,dS_{4,b}$$

$$-\int_{\Sigma_b} \left\{\left(L + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u_1 + \left(M + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v_1 + \left(N + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w_1\right\} d\Sigma_b$$

$$+\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_b} \left\{\left(L_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u + \left(M_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v + \left(N_1 + \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w\right\} d\Sigma'_b.$$

È facile vedere che il limite dell' ultimo integrale, in questa formola, è finito. Se indichiamo, infatti, con u_0, v_0, w_0 i valori di u, v, w nel punto (x_1, y_1, z_1, t_0) e facciamo nelle formole precedenti:

$$u = u_0\,,\ v = v_0\,,\ w = w_0\,,$$

troviamo

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\left\{\left(L_1+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u_0+\left(M_1+\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v_0+\left(N_1+\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w_0\right\}d\Sigma'_b=0$$

per cui

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\left\{\left(L_1+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)u+\left(M_1+\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v+\left(N_1+\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w\right\}d\Sigma'_b=$$

$$\int_{\Sigma_b}\left\{\left(L_1+\frac{\partial u_1 dt}{\partial t\, dn}\right)(u-u_0)+\left(M_1+\frac{\partial v_1 dt}{\partial t\, dn}\right)(v-v_0)+\left(N_1+\frac{\partial w_1 dt}{\partial t\, dn}\right)(w-w_0)\right\}d\Sigma_b$$

e l'ultimo integrale è certamente proprio.

4. Andiamo ora a stabilire delle formole analoghe alla (17) per le espressioni:

$$(18)\qquad \varpi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \chi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \varrho=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Applicheremo perciò la formola (3) al sistema di funzioni u, v, w, al sistema di funzioni u_2, v_2, w_2, corrispondenti alla funzione φ data dalla (7), ed allo spazio $S'_{4,a}$ limitato dalla varietà conica C'

$$(19)\qquad \frac{a(t_1-t)}{r}-1=0,$$

dalla varietà cilindrica c e dalla parte Σ'_a della stessa varietà Σ di prima e chiameremo Σ''_a, Σ'''_a le parti di C' e di c che insieme a Σ'_a determinano il contorno completo di $S'_{4,a}$.

In questo caso abbiamo:

$$(20)\quad u_2=0,\ v_2=-\left[1-\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{z-z_1}{r},\quad w_2=\left[1-\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\frac{y-y_1}{r}$$

e corrispondentemente su C' e c

$$(21)\quad \begin{cases} L_2=0\,,\quad M_2=a^2\dfrac{dr}{dn}\dfrac{z-z_1}{r}\left[-\dfrac{1}{r}+3\,\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^3}\right], \\ N_2=-a^2\dfrac{dr}{dn}\dfrac{y-y_1}{r}\left[-\dfrac{1}{r}+3\,\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^3}\right]. \end{cases}$$

La (3), in queste ipotesi, si scriverà

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{S'_{4,a}}(Yv_2+Zw_2)\,dS'_{4,a}+\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\left\{\left(M+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v_2+\left(N+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w_2\right\}d\Sigma_a \\ \displaystyle\quad -\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\left\{L_2u+\left(M_2+\frac{\partial w_2}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)v+\left(N_2+\frac{\partial w_2}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right)w\right\}d\Sigma_a=0. \end{cases}$$

Ora su Σ''_a è $v_2 = w_2 = 0$, $L_2 = 0$

$$M_2 + \frac{\partial v_2}{\partial t}\frac{dt}{dn} = a^2 \frac{z - z_1}{r^2}\frac{dr}{dn}\left[-1 + \frac{a^2(t_1 - t)^2}{r^2}\right] + 2a^2 \frac{(z - z_1)(t_1 - t)}{r^3}\left[a^2 \frac{t_1 - t}{r}\frac{dr}{dn} - \frac{dt}{dn}\right] = 0$$

$$N_2 + \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{dt}{dn} = 0,$$

quindi l'insieme degli integrali estesi a Σ''_a che compaiono in (22), è identicamente nullo.

L'insieme degli integrali estesi a Σ'''_a, invece, ricordando che su Σ'''_a è $\frac{dt}{dn} = 0$, $\frac{dr}{dn} = 1$, si riduce a

$$(23) \qquad -\int_{\Sigma'''_a} (M_2 v + N_2 w)\, d\Sigma'''_a + \int_{\Sigma'''_a} (M v_2 + N w_2)\, d\Sigma'''_a =$$

$$a^2 \int_{\Sigma'''_a} \left(v \frac{dz}{dr} - w \frac{dy}{dr}\right) \frac{d\Sigma'''_a}{r} - 3a^4 \int_{\Sigma'''_a} \frac{(t_1 - t)^2}{r^3}\left(v \frac{dz}{dr} - w \frac{dy}{dr}\right) d\Sigma'''_a$$

$$-(b^2 - 2a^2)\int_{\Sigma'''_a} \theta\left(v_2 \frac{dy}{dr} + w_2 \frac{dz}{dr}\right) d\Sigma'''_a - 2a^2 \int_{\Sigma'''_a} \left(\frac{dv}{dr} v_2 + \frac{dw}{dr} w_2\right) d\Sigma'''_a$$

$$-2a^2 \int_{\Sigma'''_a} \left[\left(\varpi \frac{dz}{dr} - \varrho \frac{dx}{dr}\right) v_2 + \left(\chi \frac{dx}{dr} - \varpi \frac{dy}{dr}\right) w_2\right] d\Sigma'''_a .$$

Ora, ripetendo delle considerazioni già fatte, si trova facilmente:

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\Sigma'''_a} \left(v \frac{dz}{dr} - w \frac{dy}{dr}\right) \frac{d\Sigma'''_a}{r} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\Sigma'''_a} \frac{(t_1 - t)^2}{r^3}\left(v \frac{dz}{dr} - w \frac{dy}{dr}\right) d\Sigma'''_a = -\frac{8\pi}{3}\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\, \varpi(x_1, y_1, z_1, t)\, dt,$$

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\Sigma'''_a} \left(\frac{dv}{dr} v_2 + \frac{dw}{dr} w_2\right) d\Sigma'''_a = -\frac{8\pi a^2}{3}\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\, \varpi(x_1, y_1, z_1, t)\, dt,$$

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\Sigma'''_a} \left[\left(\varpi \frac{dz}{dr} - \varrho \frac{dx}{dr}\right) v_2 + \left(\chi \frac{dx}{dr} - \varpi \frac{dy}{dr}\right) w_2\right] d\Sigma'''_a$$

$$= \frac{8\pi a^4}{3}\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\, \varpi(x_1, y_1, z_1, t),$$

mentre è identicamente

$$v_2 \frac{dy}{dr} + w_2 \frac{dz}{dr} = 0,$$

sicchè, per $\varepsilon = 0$, l'espressione (23) si riduce a

$$8\pi a^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2 \varpi(x_1, y_1, z_1, t).$$

Se dunque indichiamo con $S_{4,a}$, Σ_a ciò che diventano $S'_{4,a}$, Σ'_a quando ε tende a zero potremo scrivere la formola

$$(24) \qquad 8\pi a^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2 \varpi(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = -\int_{S_{4,a}} (Yv_2 + Zw_2)\, dS_{4,a}$$

$$-\int_{\Sigma_a} \left\{ \left(M + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right) v_2 + \left(N + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right) w_2 \right\} d\Sigma_a$$

$$+ \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_a} \left\{ L_2 u + \left(M_2 + \frac{\partial v_2}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right) v + \left(N_2 + \frac{\partial w_2}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right) w \right\} d\Sigma'_a.$$

Come prima si vede facilmente che l'ultimo integrale è finito.

Le altre formole, relative a χ e ϱ che si potrebbero stabilire direttamente partendo dagli altri due sistemi di funzioni u_3, v_3, w_3; u_4, v_4, w_4 corrispondenti alla funzione φ data dalla (7) si otterranno dalla (24), facilmente, con lo scambio circolare delle quantità X, Y, Z; u, v, w e col mutare l'indice 2 successivamente negli indici 3 e 4.

5. Derivando una volta, le formole (17), (24) e le analoghe in χ e ϱ, rispetto a t_1 e indicando con $8\pi b^2 T$, $8\pi a^2 P$, $8\pi a^2 Q$, $8\pi a^2 R$ i secondi membri delle formole che così risultano, si può scrivere:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2 \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \theta(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = T \\ 2a^2 \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \varpi(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = P, \quad 2a_2 \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \chi(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = Q, \\ 2a^2 \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \varrho(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = R. \end{array} \right.$$

Da queste formole, operando come nella Nota citata in principio, si determinano facilmente i valori di u, v, w nel punto (x_1, y_1, z_1, t) nel modo voluto.