ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

scintilla senza i condensatori non attiva l'aria in modo sensibile; invece eccita distintamente il gas luce, sebbene meno che coi condensatori. Accenno appena a questi risultati per prendere data, mentre le ricerche seguitano sui vari gas e sulle diverse cagioni che possono avervi influenza.

Fisica. — *Criptocrosi, ed altre ricerche intorno ai raggi X.* Memoria del Corrisp. A. Ròiti.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del secondo ordine con due variabili indipendenti.* Nota del dott. Onorato Niccoletti, presentata dal Socio L. Bianchi.

In un lavoro, collo stesso titolo di questa Nota, che ho presentato alla R. Scuola normale superiore di Pisa per l'abilitazione all'insegnamento, ho trattato la questione seguente:

« Data un'equazione lineare di 2° ordine:

$$(1) \qquad \Omega(z) = ar + 2bs + ct + 2dp + 2eq + fz = 0\,,$$

« dove, secondo le notazioni di Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\,, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \cdots\cdots$$

« ed $a, b, c \ldots f$ sono funzioni note di x e di y;

« determinare *tutte* le funzioni θ composte linearmente ed omogeneamente
« con z e colle sue derivate, e che per ogni forma della funzione z, integrale
« della (1), soddisfano ad una equazione analoga;

« determinare *tutte* le funzioni φ, il cui differenziale sia una funzione lineare
« omogenea in z e nelle sue derivate, che, per ogni forma di z integrale
« della (1), soddisfano ad una equazione analoga ».

Una tale funzione θ si dirà una *trasformata differenziale della z di ordine m*, quando la z contenga (in modo essenziale) le derivate della z fino all'ordine m: e la trasformazione che lega le due equazioni in z e θ si dirà una *trasformazione differenziale dell'ordine m*; analogamente, una tale funzione φ si dirà una *trasformata integrale della z di ordine m*, quando il suo differenziale contenga (in modo essenziale) le derivate di z fino all'ordine m: e la trasformazione corrispondente si dirà una *trasformazione integrale dell'ordine m.*

Mi permetto di comunicare a questa R. Accademia i risultati delle mie ricerche, riserbandomi di dare in altra occasione le dimostrazioni.

1. Ricordiamo dapprima alcune definizioni. Per *componenti* del 1° ordine della espressione differenziale $\Omega(z)$, intendiamo le espressioni differenziali seguenti:

$$\Omega_1(z) = ap + bq + dz; \qquad \Omega_2(z) = bp + cq + ez; \tag{2}$$

l'equazione del secondo ordine in u:

$$(3)\left\{\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{\partial^2(au)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(bu)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(cu)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial(du)}{\partial x} - 2\frac{\partial(eu)}{\partial y} + fu = 0 \\ &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d_1\frac{\partial u}{\partial x} + 2e_1\frac{\partial u}{\partial y} + f_1 u = 0 \end{aligned}\right.$$

si dice *aggiunta* dell'equazione data, e le sue componenti:

$$(4)\quad \begin{aligned} \Phi_1(u) &= \frac{\partial(au)}{\partial x} + \frac{\partial(bu)}{\partial y} - du = & \Phi_2(u) &= \frac{\partial(bu)}{\partial x} + \frac{\partial(cu)}{\partial y} - eu = \\ &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + d_1 u & &= b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} + e_1 u \end{aligned}$$

sono le espressioni *aggiunte* delle componenti Ω_1 ed Ω_2 (¹).

Un'equazione del secondo ordine e la sua aggiunta sono *equivalenti*, si riducono cioè l'una all'altra con un cambiamento proporzionale di funzione incognita, quando si abbia:

$$\mathrm{H} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{a(e_1 - e) - b(d_1 - d)}{\Delta}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{b(e_1 - e) - c(d_1 - d)}{\Delta}\right\} = 0 \tag{5}$$

dove
$$\Delta = b^2 - ac.$$

È perciò necessario e sufficiente che si possano determinare una soluzione ω della equazione data ed una μ dell'aggiunta, che soddisfino alle due relazioni:

$$\mu\,\Omega_1(\omega) - \omega\,\Phi_1(\mu) = 0; \qquad \mu\,\Omega_2(\omega) - \omega\,\Phi_2(\mu) = 0 \tag{6}$$

ed allora ad ogni soluzione z della (1) se ne può coordinare una della (3), che insieme colla z soddisfi a due relazioni analoghe alle (6).

La funzione H dei coefficienti della (1) è un *invariante*: non muta, quando si muti proporzionalmente la funzione incognita: cambiando variabili indipendenti si moltiplica per il determinante funzionale delle antiche variabili in funzione delle nuove.

2. Il teorema fondamentale della teoria delle trasformazioni differenziali del 1° ordine è il seguente:

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie...* Vol. II, pag. 71 e ss.

« Se z è l' integral generale della (1), condizione necessaria e sufficiente, « perchè un' espressione della forma:

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q \tag{7}$$

« soddisfi, per ogni forma di z, ad un' equazione lineare del secondo ordine, « è che θ si annulli per due soluzioni particolari della equazione data, e sia « determinata da questa condizione a meno di un fattore di proporzionalità. « L' equazione, a cui in tal caso θ soddisfa, appartiene alla medesima classe « dell' equazione data e si riduce alla forma normale col medesimo cambia- « mento di variabili.

« Vi sono però due casi di eccezione:

« *a)* se l' equazione è del tipo iperbolico ed ha la forma normale:

$$s + ap + bq + cz = 0 \tag{8}$$

« un' espressione

$$\theta = \alpha z + \beta p \quad (\text{oppure } \theta = \alpha z + \gamma q)$$

« soddisfa ad un' equazione analoga alla (8), o quando ne sia una trasformata « di Laplace, oppure si annulli per una soluzione particolare dell' equazione « stessa (trasformazione del Levy);

« *b)* se l' equazione è del tipo parabolico ed ha la forma normale:

$$r + 2ap + 2bq + cz = 0\,. \tag{9}$$

« un' espressione:

$$\theta = \alpha z + \beta p$$

« soddisfa allora ed allora soltanto ad un' equazione analoga, quando si an- « nulli per una soluzione particolare dell' equazione stessa ».

Queste trasformazioni si diranno *singolari*. Di più:

« Ogni trasformazione differenziale del 1° ordine si ottiene, nel caso del « tipo iperbolico, dalla composizione di due trasformazioni elementari: cioè « una trasformazione di Laplace (e la sua inversa) ed una trasformazione « del Levy: nel caso del tipo parabolico, componendo due trasformazioni « singolari ».

« Due trasformazioni differenziali del 1° ordine sono sempre permutabili ».

Questi risultati per le equazioni del tipo iperbolico sono dovuti al Darboux [1].

Il metodo di dimostrazione del teorema fondamentale enunciato, fa conoscere, nel caso generale, due soluzioni particolari dell' equazione aggiunta

[1] Cf. Darboux, l. c., pag. 177.

a quella, a cui soddisfa la (7), una soluzione nel caso delle trasformazioni singolari (eccettuata quella di Laplace); e si dimostra agevolmente che:

« Indicando con $P(\theta) = 0$ l'equazione in θ, con $Q(\lambda) = 0$ la sua equa- « zione aggiunta, dalla $Q(\lambda) = 0$ si passa alla $\Phi(u) = 0$ con una trasforma- « zione differenziale del 1° ordine, che corrisponde alle soluzioni particolari « della $Q(\lambda) = 0$, a cui sopra abbiamo accennato ».

Ne segue:

« Quando per l'equazione primitiva sia noto anche l'integral generale « della equazione aggiunta, altrettanto accade di ogni sua trasformata diffe- « renziale del 1° ordine; e l'integral generale della equazione aggiunta della « trasformata si ottiene da quello della $\Phi(u) = 0$ con quadrature ».

3. Il teorema fondamentale della teoria delle trasformazioni integrali del 1° ordine è il seguente:

« Ad ogni coppia di soluzioni ω ed u dell'equazione data e dell'aggiunta, « corrisponde una serie semplicemente infinita (dipendente da una costante « arbitraria ε) di equazioni lineari del secondo ordine, trasformate integrali « del 1° ordine della z, il cui integral generale è dato dalla formula:

$$\varphi + \varepsilon \frac{z}{\omega} \tag{10}$$

« dove

$$\varphi = \int \left\{ u\Omega_2(z) - z\Phi_2(u) + \frac{\partial(vz)}{\partial x} \right\} dx - \left\{ u\,\Omega_1(z) - z\Phi_1(u) - \frac{\partial(vz)}{\partial y} \right\} dy\,; \tag{11}$$

« essendo:

$$-v\omega = \int \{u\Omega_2(\omega) - \omega\,\Phi_2(u)\}\, dx - \{u\,\Omega_1(\omega) - \omega\,\Phi_1(u)\}\, dy\,, \tag{12}$$

« e dove ε è la costante arbitraria da cui l'equazione dipende ».

Vi sono però a questo teorema due casi di eccezione, che portano alle trasformazioni singolari: e precisamente:

« Soltanto le equazioni del tipo iperbolico e parabolico ammettono delle « trasformazioni singolari: e queste sono date, nel caso del tipo iperbolico, « quando l'equazione abbia la forma (8), dalle formule:

$$\sigma = \int u\Omega_2(z)dx + z\,\Phi_2(u)dy\,, \tag{13}$$

$$\tau = \int z\Phi_2(u)dx + u\,\Omega_2(z)dy\,; \tag{14}$$

« e nel caso del tipo parabolico, quando l'equazione abbia la forma (9), « dalla formula:

$$\varrho = \int \{u\Omega_2(z) - z\Phi_2(u)\}\, dx - \{u\,\Omega_1(z) - z\Phi_1(u)\}dy \text{ ».} \tag{15}$$

Inoltre:

« L'equazione trasformata integrale di 1° ordine della $\Omega(z) = 0$, cor-
« rispondente alla coppia (ωu), ha come aggiunta l'equazione a cui soddisfa
« la funzione $\dfrac{\omega(v^2 - \varDelta u^2)}{u}\,\psi$, essendo ψ la trasformata integrale della $\Phi(u) = 0$
« corrispondente alla coppia $(u\omega)$. La costante ha lo stesso valore in tutte
« due le equazioni ».

Ne segue che per ogni trasformata integrale è noto anche l'integral generale dell'equazione aggiunta e quindi:

« L'applicazione ripetuta del medesimo processo non richiede più che
« quadrature ».

Da questi risultati, si ottengono, come casi particolari, le trasformazioni finora note.

Quando sia $H = 0$ e si prendano per eseguire la trasformazione due soluzioni ω ed u legate dalle (6), e si faccia inoltre $\varepsilon = 0$, si ha la trasformazione del Moutard per le equazioni equivalenti alla loro aggiunta.

Se l'equazione data ammette la soluzione particolare $z = 1$, prendendo $\omega = 1$, u affatto arbitraria, si ha una trasformazione dovuta al Liouville, ritrovata poi dal Burgatti per le equazioni del tipo ellittico [1].

Tutte due queste trasformazioni sono involutorie.

La trasformazione del Liouville gode di proprietà importanti, essa dà come caso particolare quella del Moutard; l'applicazione successiva della medesima trasformazione non richiede più quadrature; ed infine:

« Ogni trasformazione integrale del 1° ordine (non singolare) della
« $\Omega(z) = 0$, si ottiene cambiando dapprima la funzione incognita nell'equa-
« zione data, moltiplicando la z per una soluzione particolare dell'equazione
« stessa ed eseguendo quindi sull'equazione così mutata la più generale
« trasformazione del Liouville ».

E di qui segue:

« Se φ è la trasformata integrale della $\Omega(z) = 0$, corrispondente alla
« coppia (ω, u), la $\dfrac{z}{\omega}$ si deduce dalla φ con una particolare trasformazione
« del Liouville ».

Osserviamo infine il teorema, relativo alle trasformazioni singolari:

« Nei due casi iperbolico e parabolico, nei quali le trasformazioni
« singolari esistono, la trasformata integrale del 1° ordine più generale della
« $\Omega(z) = 0$ si ottiene eseguendo su una trasformata integrale singolare una
« trasformazione differenziale singolare del 1° ordine, o inversamente ».

[1] Cf. R. Liouville, *Formes intégrables des équations linéaires du second ordre* (Journal de l'École Polytechnique, LVI Cah. 1886, pag. 32 e ss. — P. Burgatti, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine* (*tipo ellittico*) *etc.* (Annali di Matematica, Serie IIª, Tomo XXIII, luglio 1895).

Per il caso del tipo iperbolico, questo risultato è dovuto al Darboux ([1]).

4. Veniamo ora alle trasformazioni, differenziali ed integrali, di ordine superiore. Il risultato, molto semplice, è dato dal teorema:

« Ogni trasformazione differenziale od integrale, di ordine superiore al « primo, si ottiene componendo delle trasformazioni del 1° ordine: e precisamente una trasformazione differenziale dell' ordine m si ottiene componendo « delle sole trasformazioni differenziali del 1° ordine: una integrale, componendo *una* trasformazione integrale del 1° ordine con altre differenziali. « L' ordine di composizione è affatto arbitrario.

« Due trasformazioni differenziali, una integrale ed una differenziale sono « sempre permutabili.

« Insieme con ogni equazione trasformata è noto anche l' integral generale della equazione aggiunta (quando lo sia per la primitiva); e si ottiene « con quadrature da quello della $\Phi(u) = 0$ ».

5. Le trasformazioni integrali singolari del tipo iperbolico danno, successivamente applicate, un metodo ricorrente, molto semplice, per costruire *tutte* le equazioni lineari di questo tipo integrabili col metodo di Laplace, e precisamente:

« L' applicazione illimitata delle trasformazioni singolari σ e τ conduce « dall' equazione elementare

$$s = 0$$

« a *tutte* le equazioni, per le quali la serie di Laplace è finita nei due sensi; « partendo invece dalle equazioni più generali di rango nullo rispetto ad x « o ad y:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0\,,$$

« a *tutte* le equazioni, la cui serie di Laplace è finita in un sol senso ».

E di qui segue:

« Se un' equazione lineare del 2° ordine è integrabile col metodo di « Laplace, il problema di Cauchy ad essa relativo è ricondotto alle quadrature »; un risultato già ottenuto dal Goursat per una via affatto diversa ([2]).

([1]) Cf. Darboux, l. c., pag. 183.

([2]) Cf. Goursat, *Sur une classe d'équations aux derivées partielles du second ordre...* (Acta Mathematica, tomo XIX, pag. 314).