ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

dere d'avere un certo diritto di raccogliere il frutto del lavoro in un campo di studio che ho iniziato.

In una prossima Nota riferirò altre esperienze che ho in corso le quali spero mi permetteranno di comprovare ancora la mia idea sulla costituzione dell'acido $C_8H_{12}O_5$, e discuterò allora i suoi rapporti coll'acido canforico e colla canfora. Fin d'ora però dalle esperienze e dai fatti riportati, appare sempre più plausibile la formola proposta per l'acido canforico dal Bredt a preferenza di tutte le altre.

Ai sigg. Decio Trasciatti e Carlo Egidi studenti praticanti del laboratorio, i quali mi hanno coadiuvato nella parte analitica di queste ricerche, i miei ringraziamenti.

Matematica. — *Sulla probabilità degli errori di situazione di un punto nello spazio.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio Cremona [1].

Le coordinate X Y Z di un punto dello spazio si possano determinare indirettamente per mezzo della osservazione delle grandezze fra loro indipendenti $\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n$, delle quali esse siano funzioni, si abbia cioè

$$X = X(\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n).$$
$$Y = Y(\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n).$$
$$Z = Z(\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n).$$

Se $o_1\,o_2 \ldots o_n$ sono i valori osservati di $\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n$, sarà da assumersi come posizione del punto, data dalla osservazione, quella definita dalle coordinate

$$X_0 = X(o_1\,o_2 \ldots o_n)$$
$$Y_0 = Y(o_1\,o_2 \ldots o_n)$$
$$Z_0 = Z(o_1\,o_2 \ldots o_n).$$

Si indichino con

$$x = X - X_0 \qquad y = Y - Y_0 \qquad z = Z - Z_0$$

gli errori commessi in questa determinazione delle coordinate, con v_r gli errori da cui sono affette le osservazioni o_r $(r = 1, 2, \ldots n)$, e si suppongano i v_r tanto piccoli da potersene trascurare i quadrati, i prodotti e le potenze superiori: si avranno in tali ipotesi le relazioni

$$(1)\quad \begin{cases} x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\ y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \\ z = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \end{cases}$$

[1] Presentata nella seduta del 7 gennaio 1897.

nelle quali si è posto

$$\alpha_r = \frac{\partial X_0}{\partial o_r} \qquad \beta_r = \frac{\partial Y_0}{\partial o_r} \qquad \gamma_r = \frac{\partial Z_0}{\partial o_r} \qquad (r = 1, 2, \dots n).$$

Se si suppone che gli errori v_r seguano la legge di frequenza di Gauss

$$\frac{h_r}{\sqrt{\pi}} e^{-h_r^2 v_r^2},$$

si otterrà la probabilità $P\,dx\,dy\,dz$ che l'errore di situazione del punto sia compreso fra x e $x + dx$, y e $y + dy$, z e $z + dz$, estendendo l'integrazione della espressione differenziale

$$(2) \qquad \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-[hhvv]} dv_1\, dv_2 \dots dv_n,$$

che rappresenta la probabilità della coesistenza degli errori indipendenti $v_1\, v_2 \dots v_n$, al campo

$$x \leq [\alpha v] \leq x + dx \qquad y \leq [\beta v] \leq y + dy \qquad z \leq [\gamma v] \leq z + dz.$$

Bravais, che per il primo ha risoluto questo problema (1), ha indicato un metodo generale per effettuare questa integrazione. Si aggiungano cioè alle (1) altre $n - 3$ equazioni della stessa forma, i cui coefficienti siano arbitrari, considerando i loro primi membri $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$ come variabili indipendenti. Se per mezzo del sistema così ottenuto si eliminano dalla (2) $v_1\, v_2 \dots v_n$, si ottiene una espressione differenziale nelle nuove variabili $x\, y\, z\, \lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$, e la sua integrazione rispetto alle variabili $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$, fra i limiti $-\infty$ e $+\infty$, condurrà ad un risultato nel quale non figurano più i coefficienti arbitrari introdotti, e che sarà la cercata probabilità.

La pratica attuazione di questo procedimento presenta però gravi difficoltà. Bravais lo applica dapprima alla determinazione della probabilità dell'errore di situazione di un punto nel piano, riducendo a quattro sole le variabili elementari v, e perviene così alla espressione

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-(ax^2 + 2exy + by^2)}\, dx\, dy,$$

della quale determina *a posteriori* i valori delle costanti, effettuandone l'integrazione una volta rispetto ad y fra $-\infty$ e $+\infty$, ed un'altra volta rispetto ad x fra i medesimi limiti, e confrontando le espressioni ottenute nei due casi con quelle note valide per una sola funzione lineare x delle variabili v, e per una sola funzione lineare y delle stesse v. Ammettendo poi

(1) *Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point.* Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France, T. IX (1846).

(Mem. cit. pag. 296) che il procedimento generale sopra accennato, nel caso dello spazio, riduca la espressione differenziale alla forma

$$(3) \qquad \mathrm{P}\, dx\, dy\, dz = \frac{\mathrm{K}}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-(ax^2+by^2+cz^2+2exy+2fzx+2gxy)}\, dx\, dy\, dz\,,$$

determina anche qui le costanti *a posteriori*, effettuando l'integrazione rispetto a z fra $-\infty$ e $+\infty$ e confrontando la espressione risultante con quella già ottenuta per il piano.

Czuber nel suo trattato [1] riproduce senza modificazioni sostanziali la dimostrazione di Bravais.

Bertrand nel suo *Calcul des Probabilités* [2] espone brevemente il metodo colle seguenti parole: « On transformera la probabilité d'un système d'erreurs mis sous la forme d'un élément d'intégrale multiple, en introduisant au nombre des variables les coordonnées du point étudié auxquelles il faudra, dans le cas général, associer d'autres variables. Ces variables, arbitrairement choisies, disparaissent à la fin du calcul; mais les transformations intermédiaires sont fort compliquées ».

Qui mi propongo di mostrare come, con una opportuna sostituzione di variabili, e ricorrendo a semplici proprietà dei determinanti, si possa effettuare nel modo più generale la voluta integrazione, pervenendo nello stesso tempo a determinare direttamente i coefficienti $a\ b\ c \ldots$ nella esponenziale (3).

Si facciano le posizioni

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} a_{11} = \left[\dfrac{\alpha\alpha}{hh}\right] & a_{12} = \left[\dfrac{\alpha\beta}{hh}\right] & a_{13} = \left[\dfrac{\alpha\gamma}{hh}\right] \\ a_{21} = a_{12} & a_{22} = \left[\dfrac{\beta\beta}{hh}\right] & a_{23} = \left[\dfrac{\beta\gamma}{hh}\right] \\ a_{31} = a_{13} & a_{32} = a_{23} & a_{33} = \left[\dfrac{\gamma\gamma}{hh}\right] \end{array} \right.$$

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{31} & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{vmatrix}$$

dove con A_{rs} si intende il determinante aggiunto dell' elemento a_{rs}, e quindi $\mathrm{A} = a^2$. Se ne ricaveranno le relazioni

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial \alpha_r} = 2\,\dfrac{\alpha_r}{h_r^2} & \dfrac{\partial a_{12}}{\partial \alpha_r} = \dfrac{\beta_r}{h_r^2} & \dfrac{\partial a_{13}}{\partial \alpha_r} = \dfrac{\gamma_r}{h_r^2} \\ \dfrac{\partial a_{22}}{\partial \alpha_r} = 0 & \dfrac{\partial a_{23}}{\partial \alpha_r} = 0 & \dfrac{\partial a_{33}}{\partial \alpha_r} = 0 \end{array} \right.$$

$$(r = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

[1] *Theorie der Beobachtungsfehler*, pag. 347 e segg.

[2] Pag. 228.

e relazioni analoghe si otterranno per le derivate rispetto a β_r e γ_r, ed in virtù di queste le derivate del determinante a, si potranno porre sotto la forma

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \alpha_r} &= \frac{\alpha_r}{h_r^2}\,A_{11} + \frac{\beta_r}{h_r^2}\,A_{12} + \frac{\gamma_r}{h_r^2}\,A_{13} \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \beta_r} &= \frac{\alpha_r}{h_r^2}\,A_{21} + \frac{\beta_r}{h_r^2}\,A_{22} + \frac{\gamma_r}{h_r^2}\,A_{23} \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \gamma_r} &= \frac{\alpha_r}{h_r^2}\,A_{31} + \frac{\beta_r}{h_r^2}\,A_{32} + \frac{\gamma_r}{h_r^2}\,A_{33} \end{aligned}\right.$$

Da queste si deducono come immediate conseguenze le ulteriori relazioni

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{lll} \tfrac{1}{2}\left[\alpha\dfrac{\partial a}{\partial \alpha}\right]=a & \left[\alpha\dfrac{\partial a}{\partial \beta}\right]=0 & \left[\alpha\dfrac{\partial a}{\partial \gamma}\right]=0 \\ \left[\beta\dfrac{\partial a}{\partial \alpha}\right]=0 & \tfrac{1}{2}\left[\beta\dfrac{\partial a}{\partial \beta}\right]=a & \left[\beta\dfrac{\partial a}{\partial \gamma}\right]=0 \\ \left[\gamma\dfrac{\partial a}{\partial \alpha}\right]=0 & \left[\gamma\dfrac{\partial a}{\partial \beta}\right]=0 & \tfrac{1}{2}\left[\gamma\dfrac{\partial a}{\partial \gamma}\right]=a \end{array}\right.$$

Se quindi si effettua la sostituzione di variabili

$$v_r = \lambda_r + \tfrac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \alpha_r}\frac{x}{a} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \beta_r}\frac{y}{a} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \gamma_r}\frac{z}{a}$$

$$(r = 1\,, 2\,, \dots n)\,,$$

dove le λ_r sono legate dalle tre relazioni

$$(8)\qquad [\alpha\lambda]=0 \qquad [\beta\lambda]=0 \qquad [\gamma\lambda]=0\,,$$

le quali definiscono tre di esse, per esempio le ultime tre, in funzione delle precedenti, si vede che, qualunque siano i valori di $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$, saranno sempre soddisfatte le (1). Eseguita dunque la trasformazione della espressione (2), si otterrà la probabilità cercata estendendone l'integrazione a tutti i valori di $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$ fra $-\infty$ e $+\infty$.

Ora dalle (6) si ricava

$$\tfrac{1}{4}\left[h^2\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)^2\right] = A_{11}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13})$$
$$+ A_{12}(a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}) + A_{13}(a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}) = A_{11}\,a$$

ed analogamente

$$\tfrac{1}{4}\left[h^2\left(\frac{\partial a}{\partial \beta}\right)^2\right] = A_{22}\,a \qquad \tfrac{1}{4}\left[h^2\left(\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right)^2\right] = A_{33}\,a$$

$$\tfrac{1}{4}\left[hh\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right] = A_{21}(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33})$$
$$+ A_{22}(a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}) + A_{23}(a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}) = A_{23}\,a$$

ed analogamente

$$\tfrac{1}{4}\left[hh\frac{\partial a}{\partial \gamma}\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right]=A_{31}\,a \qquad \tfrac{1}{4}\left[hh\frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial a}{\partial \beta}\right]=A_{12}\,a\,.$$

E le stesse (6) congiunte colle (8) danno

$$\left[h^2\lambda\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right]=0 \qquad \left[h^2\lambda\frac{\partial a}{\partial \beta}\right]=0 \qquad \left[h^2\lambda\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right]=0\,.$$

Eseguita dunque la sostituzione, il differenziale (2) assumerà la forma

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\,\Delta\, e^{-[hh\lambda\lambda]}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-3}\, e^{-\frac{1}{a}(A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{23}yz+2A_{31}zx+2A_{12}xy)}\, dx dy dz$$

essendo Δ il determinante funzionale della sostituzione, del quale qui non occorre determinare l'espressione. Integrando rispetto alle variabili $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$ fra i limiti $-\infty$ e $+\infty$, si otterrà pertanto la probabilità cercata sotto la forma

$$\text{(9)}\qquad P\,dx\,dy\,dz = K\, e^{-\frac{1}{a}(A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{23}yz+2A_{31}zx+2A_{12}xy)}\, dx\,dy\,dz\,,$$

dove la costante K è definita dall'integrale multiplo

$$K=\frac{h_1\,h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\,\Delta \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_{n-3}\, e^{-[hh\lambda\lambda]}\,.$$

I coefficienti $a\ A_{11}\ A_{22}\ A_{33}$ sono definiti sotto forma di determinanti simmetrici i cui termini diagonali sono somme di quadrati: essi stessi saranno pertanto esprimibili per mezzo di somme di quadrati (¹), ossia saranno essenzialmente positivi. Le superficie di 2° ordine che si ottengono eguagliando ad una costante la forma ternaria quadratica, che figura come esponente di e nella (9), sono dunque ellissoidi omotetici concentrici (ellissoidi di egual probabilità).

Per determinare poi la costante K in funzione di $\alpha_r\ \beta_r\ \gamma_r$, indipendentemente dall'ultimo integrale, basta osservare che l'integrazione della espressione (9), estesa a tutto lo spazio, deve dare per risultato l'unità. Si ottiene con ciò

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P\,dx\,dy\,dz = K\,\frac{(\sqrt{\pi})^3}{\sqrt{D}} = 1$$

essendo D il determinante della forma ternaria quadratica esponente di e, cioè

$$D=\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{a} & \frac{A_{12}}{a} & \frac{A_{13}}{a} \\ \frac{A_{21}}{a} & \frac{A_{22}}{a} & \frac{A_{23}}{a} \\ \frac{A_{31}}{a} & \frac{A_{32}}{a} & \frac{A_{33}}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_3}\,A = \frac{1}{a}\,.$$

(¹) Czuber, op. cit., pag. 325.

Se ne ricava quindi

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{\pi})^3}.$$

Le proprietà espresse dalle equazioni (6) (7) di un determinante a, i cui elementi abbiano la legge di formazione (4), valgono qualunque sia l'ordine del determinante. La precedente dimostrazione è quindi estendibile senza modificazioni al caso generale di uno spazio lineare ad un numero qualsivoglia di dimensioni.

Fisica terrestre. — *Risultati delle misure di elettricità atmosferica fatte nel R. Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa.* Nota del dott. A. CANCANI, presentata dal Socio TACCHINI.

Sono noti già all'Accademia i risultati da me dedotti dalle misure del potenziale elettrico dell'aria fatte nel R. Osservatorio del Collegio Romano (1). Il medesimo elettrografo Thomson Mascart, con cui furono fatte le misure a Roma, venne trasportato nel luglio 1891 nell'Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, allo scopo di intraprendere delle misure e dei confronti in quella stazione a 700 metri di altezza su quella del Collegio Romano.

Nell'Osservatorio di Rocca di Papa l'apparato collocato in origine dal mio predecessore dott. Oddone, fu tenuto in azione in varî periodi per un tempo complessivo di circa due anni, in due differenti posizioni. Nei primi dodici mesi l'efflusso del collettore di Thomson avveniva verso sud all'altezza di metri 5 dal suolo, in uno spazio quasi completamente rinchiuso fra la facciata posteriore dell'Osservatorio e la collina e fortezza adiacente a 8 metri circa di distanza. Nel secondo anno l'apparato venne da me collocato in più adatta posizione, in una torretta appositamente costruita, e sovrastante all'Osservatorio. In questa seconda posizione l'efflusso avveniva verso Nord a quattro metri sulla sottostante terrazza, libera quasi tutta all'intorno e dominante l'intiero caseggiato. L'efflusso del collettore di Thomson trovavasi così in condizioni assai simili a quelle in cui trovavasi a Roma, ed in modo da poter subire, senza grandi ostacoli, l'induzione elettrica dell'atmosfera.

Difficoltà ancora più numerose che in Roma si sono presentate nell'esercizio dell'elettrometro a Rocca di Papa, in causa dei freddi invernali, della umidità che vi domina e delle nubi che avvolgono spesso l'Osservatorio. Queste due ultime cause resero spesso assolutamente impossibile l'isolamento elettrico dell'apparecchio, e sono state l'origine di molte interruzioni nelle misure.

(1) R. Accad. dei Lincei. Rend. Vol. V, 2° sem., serie 5ª, fasc. 1°.