ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

prime quattro età una quantità di foglia assai maggiore di quella che i bachi possono effettivamente consumare, anche tenuto conto dei necessari residui rappresentati dai letti.

Perchè questo forte sciupio di foglia ha luogo nelle prime quattro età, e non si avverte abbastanza sensibilmente nella quinta? La spiegazione di questo fatto apparentemente strano, risiede tutta, secondo il nostro parere, nella pratica generalmente invalsa di trinciare la foglia che si somministra ai bachi nelle prime quattro età, mentre nella quinta età la si somministra intera. Fra le ragioni che si adducono in favore del metodo della trinciatura della foglia, l'unica che ci sembra chiara e convincente, è che essa rende più facile, spedita, ed eguale la somministrazione dell'alimento ai bachi. Ma le ragioni per preferire la pratica di dare la foglia intera in tutte le età, ci sembrano di maggior peso: la foglia appassisce con molta minore facilità; quindi è mangiata per più lungo tempo e più completamente; quindi diminuiscono in proporzione i residui che vanno inutilmente perduti coi letti, e si ha una sensibile economia della foglia occorrente per l'alimentazione.

Non abbiamo circoscritte le nostre ricerche seriali dell'azoto, alla vita larvale del bombice; ma l'abbiamo anche estese alle *crisalidi* e alle *farfalle*, maschi e femmine separatamente. Essendo però i nostri studî, durante questi due periodi, riesciti incompleti, prima di presentarli al pubblico, ci prefiggiamo di continuarli nella prossima primavera, per poi farne soggetto di una speciale comunicazione.

Zoologia. — *Descrizione d' un Leptocefalo brevirostre in via di trasformarsi in anguilla.* Nota del Corrispondente G. B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul complesso di 1° ordine delle trisecanti di una superficie immersa in un* S_4. Nota del dott. E. ASCIONE, presentata dal Socio CREMONA.

In fine di un'altra Nota (1) accennai ad una certa necessità, riscontrata in ricerche di varia natura, di fare uno studio di *tutti* i tipi più generali dei complessi di rette di un S_4, o almeno di quelli di 1° ordine.

Intanto è noto (2) che un complesso di 1° ordine di un S_4 non può avere una *varietà focale* o *singolare*, e quindi dovrà essere costituito da

(1) Ascione, *Sopra alcune involuzioni dello spazio.* Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli, fasc. 1°, 1896.

(2) Segre, *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazii superiori.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo II, 1888.

rette trisecanti di una *superficie* algebrica (*focale* o *singolare*), la quale può spezzarsi in 2 o 3 superficie o degenerare nel sistema di una linea ed una superficie, o anche ridursi ad un solo punto, appartenente a tutti i raggi del complesso.

Inoltre il Bordiga (1) ha fatto uno studio dei complessi in generale nello spazio a 4 dimensioni, ed in particolare di alcuni di 1° ordine, ma esclude completamente dalle sue considerazioni generali il complesso generato da trisecanti di una superficie unica.

Quindi, volendo completare lo studio di tutti i tipi più generali di complessi di 1° ordine, io mi propongo appunto in questa Nota di trattare questo tipo di complessi, abbastanza importante e che è il più generale tra quelli dello stesso ordine. E dimostro che tre sole superficie possono, con le loro trisecanti, dar luogo ad un complesso di questo tipo: una delle quali è la notevole F_2^6 del Veronese (2). Però lo studio di queste superficie, che si presenta abbastanza interessante, sarà oggetto di un' altra Nota.

1. Chiameremo, come al solito, *complesso* di rette di un S_4 un sistema ∞^3 di rette dello S_4: *ordine* del complesso è il numero dei raggi del sistema che escono da un punto arbitrario dello S_4, mentre la *classe* del complesso è il grado della rigata formata dai raggi di questo che appartengono ad uno spazio ordinario (3).

2. Sia ora F_2^x una superficie dello spazio S_4, di ordine x, per ora indeterminato. Se questa superficie ammette ∞^3 trisecanti, queste costituiscono un complesso Γ, di cui la F_2^x è la superficie *focale* o *singolare*.

Consideriamo pure che Γ sia di 1° ordine, cioè per un punto arbitrario dello S_4 passi un solo raggio trisecante della F_2^x.

3. Un punto arbitrario della F_2^x è punto *singolare* di Γ e i raggi del complesso che passano per esso formano un cono razionale, di cui indicheremo con m l' ordine.

In uno spazio ordinario S i raggi di Γ generano una rigata, costituita dalle trisecanti della curva γ_x, intersezione di F_2^x con lo spazio S. Il grado n di questa rigata è la *classe* di Γ.

La curva γ_x sarà multipla secondo m per la superficie delle sue trisecanti, perchè per un punto P arbitrario di γ_x passano m trisecanti, intersezione di S col cono dei raggi di Γ che ha il vertice in P.

La γ_x, non possederà alcun raggio quadrisecante.

(1) Bordiga, *Dei complessi in generale nello spazio a 4 dimensioni ed in particolare di quelli di 1° ordine.* Atti del R. Istituto Veneto, serie IV, tomo VI.

(2) Veronese, *Principien des Projicirens und Schneidens.* Math. Annalen, B. XIX. Vedi pure Bordiga, *La superficie del 6° ordine con 10 rette, nello spazio* R_4 *e le sue proiezioni nello spazio ordinario.* Atti della R. Acc. dei Lincei, Serie 4ª, vol. III, 1887.

(3) Dicendo *spazio ordinario* o semplicemente *spazio* intenderemo sempre che si tratti di uno spazio a 3 dimensioni.

4. Una retta r di S_4 è direttrice semplice di una rigata dell'ordine $n+1$, dalla quale si stacca un cono dell'ordine m, se la retta r ha un punto comune con la F_2^x. Sicchè se r è trisecante della F_2^x, ovvero se r è un raggio di Γ, la rigata corrispondente si scinde in tre coni dell'ordine m.

Da ciò si deduce senz'altro la notevole relazione

$$n+1=3m \tag{1}$$

che lega la classe e l'ordine di un cono del complesso Γ.

5. I raggi del complesso che incontrano un piano α arbitrario, formano una congruenza di ordine $n+1$, di cui fanno parte x coni di ordine m, dovuti agli x punti comuni ad α e ad F_2^x.

Se il piano α è tale che sega F_2^x secondo una cubica piana, ogni retta di α appartiene a Γ e la congruenza corrispondente al piano si scinde nel sistema dei fasci di raggi di α e nel sistema dei coni di Γ, i cui vertici appartengono alla cubica.

In tale caso, chiameremo α un *piano parassito* di Γ.

6. Consideriamo ora nello spazio S_4 due spazii S, S' a tre dimensioni.

Per un punto M di S passa un solo raggio m di Γ, che sega S' in un punto M'. I punti M, M', al variare di m generano tra S ed S' una corrispondenza cremoniana C.

Questa corrispondenza C ha per *elementi fondamentali* in S:

1° *una curva* γ_x *fondamentale* m^{pla} *per la* C, *curva che è l'intersezione di* F_2^x *con* S;

2° *una curva* C_n *piana, di ordine* n, *fondamentale semplice. Questa curva appartiene al piano* σ *comune ai due spazii* S *ed* S' *ed è l'intersezione di* σ *con la rigata* F'_n *di ordine* n, *costituita dalle rette di* Γ *appartenenti ad* S';

3° n^2-m^2x *rette fondamentali parassite.*

Di vero, per ogni punto M di γ_x passa un cono di raggi di Γ, di ordine m; e quindi ad M corrisponde in S' una curva μ_m razionale, di ordine m. Sicchè γ_x è una curva fondamentale m^{pla} per lo spazio S.

Inoltre ad ogni punto P della C_n intersezione di F'_n con σ corrisponde per intero il raggio di Γ che passa per esso ed appartiene alla F'_n, perchè questo raggio appartiene ad S'. Sicchè C_n è curva fondamentale semplice.

Per ottenere finalmente il numero delle rette parassite, si osservi che in S' esisterà una curva C'_n, analoga alla C_n, che trovasi pure nel piano σ. La C_n e la C'_n hanno n^2 punti comuni, ma x sono i punti comuni a σ ed alla F_2^x ed ognuno di questi punti è m^{plo} per ciascuna delle curve. Dunque i rimanenti punti comuni alle due curve sono n^2-m^2x. A questi corrisponderanno n^2-m^2x rette r parassite in S ed n^2-m^2x rette r' parassite in S'. Queste rette parassite provengono dai piani che secano la F_2^x secondo cubiche, cioè dai piani parassiti di Γ. Ognuno dei piani parassiti seca rispettivamente S ed S' in 2 rette parassite *coniugate* r, r' tali che ad un punto di una di esse corrisponderà tutta l'altra retta.

Due rette parassite coniugate si secano in un punto del piano σ comune alle C_n e C'_n.

Analogamente saranno *fondamentali* in S':

1° *una curva* γ'_x *fondamentale* m^{pla}, *intersezione di* F_2^x *con* S;

2° *una curva* C'_n *fondamentale semplice intersezione di* σ *con la superficie rigata* F_n, *costituita dalle rette di* Γ *appartenenti ad* S;

3° $n^2 - m^2x$ *rette* r' *fondamentali parassite.*

Si noti pure che le rigate F_n e F'_n sono costituite rispettivamente dalle trisecanti di γ_x e γ'_x e per esse queste curve sono ordinatamente m^{ple}: inoltre la F_n contiene le $n^2 - m^2x$ rette r parassite in S e la F'_n contiene le $n^2 - m^2x$ rette r' parassite in S'. Sicchè si avrà $F_n \equiv \gamma_x^m, (n^2 - m^2x)\, r$ ed $F'_n \equiv \gamma'^m_x, (n^2 - m^2x)\, r'$.

7. *Il piano* $\sigma \equiv SS'$ *è punteggiato unito per la corrispondenza* C, poichè ad ogni suo punto in uno dei due spazii S, S' corrisponde il punto stesso considerato come appartenente all'altro spazio.

8. *Ad un piano* φ *di* S *corrisponderà in* S' *una superficie di ordine* $n+1$, *e precisamente una* $\Phi'_{n+1} \equiv \gamma'^m_x\, C'_n\, (n^2 - m^2x)\, r'$.

Di vero un piano φ di S è direttore di una congruenza di ordine $n+1$ e questa sega S' secondo una superficie di ordine $n+1$. Per le multiplicità delle linee fondamentali indicate basta tener presente ciò che si è detto per la multiplicità delle linee fondamentali per la C, appartenenti ad S'.

Analogamente: *ad un piano* φ' *di* S' *corrisponde in* S *una superficie di ordine* $n+1$ *e precisamente una* $\Phi_{n+1} \equiv \gamma_x^m\, C_n\, (n^2 - m^2x)\, r$.

Se il piano φ coincide con σ, la Φ'_{n+1} si spezza nella F'_n corrispondente a C_n e nel piano σ stesso.

9. Sarà facile avere la jacobiana delle Φ'_{n+1}. Osservando che alla curva C_n corrisponde la superficie, di ordine n, $F'_n \equiv \gamma'^m_x\, (n^2 - m^2x)\, r'$, si ha che:

La jacobiana delle Φ'_{n+1} *in* S' *si spezza nelle due superficie* $F'_n \equiv \gamma'^m_x\, (n^2 - m^2x)\, r'$ ed $F'_{3n} \equiv \gamma'^{3m-1}_x\, C'^3_n\, (n^2 - m^2x)\, r'^3$ *corrispondenti rispettivamente alle curve* C_n e γ_x.

Analogamente: *la jacobiana delle* Φ_{n+1} *in* S *si spezza nelle due superficie* $F_n \equiv \gamma_x^m\, (n^2 - m^2x)\, r$ ed $F_{3n} \equiv \gamma_x^{3m-1}\, C_n^3\, (n^2 - m^2x)\, r^3$, *corrispondenti rispettivamente alle curve* C'_n e γ'_x.

10. *Ad una retta* r *di* S *corrisponderà in* S' *una curva dell'ordine* $n+1$ *e precisamente una* $\varrho'_{n+1} \equiv \gamma'^{3n}_x\, C'^n_n$. In fatti la rigata di Γ che ha per direttrice semplice la r è dell'ordine $n+1$. Di più per i punti di appoggio di ϱ'_{n+1} alle γ'_x e C'_n basta notare che la r incontra la F_{3n} e la F_n in S rispettivamente in $3n$, ed n punti.

Analogamente *ad una retta* r' *di* S' *corrisponderà in* S *una curva dell'ordine* $n+1$ *e precisamente una* $\varrho_{n+1} \equiv \gamma_x^{3n}\, C_n^n$.

Se la retta r si appoggia in uno, due punti alla γ_x, dalla ϱ'_{n+1} si staccheranno rispettivamente una, o due curve di ordine m; e se la r è trisecante della γ_x, la ϱ'_{n+1} sarà costituita dalle tre curve di ordine m, corrispondenti ai tre punti di appoggio.

Se la r appartiene per intero al piano σ, la ϱ'_{n+1} si scinde nella retta r stessa ed in n rette che sono le trisecanti di γ'_x condotte rispettivamente dagli n punti in cui r sega la C_n.

11. Cerchiamo ora di determinare x, m ed n. Introduciamo pure un nuovo numero incognito, cioè il numero dei punti doppî apparenti della γ_x, che indicheremo con h.

Si ha intanto la relazione già accennata (n. 4)

$$n + 1 = 3m. \tag{1}$$

Un'altra relazione si ha esprimendo che la multiplicità della γ_x per la superficie F_n è m. Si ha

$$h - x + 2 = m. \tag{2}$$

Una terza relazione si ha esprimendo che l'ordine della superficie delle trisecanti della γ_x è n. Adoperando una formola nota ([1]), si ha

$$(x - 2)\left\{ h - \frac{1}{6}x(x-1) \right\} = n. \tag{3}$$

E finalmente una quarta relazione si ottiene esprimendo che il numero delle quadrisecanti della curva γ_x, con h punti doppî apparenti è uguale a zero. Adoperando ancora una formola del Berzolari ([2]), si ha

$$\frac{1}{2}h(h - 4x + 11) - \frac{1}{24}x(x-2)(x-3)(x-13) = 0. \tag{4}$$

Ora noi potremmo risolvere il sistema (1), (2), (3) e (4) e ricavare i numeri incogniti x, m, n, h; ma questo metodo è poco geometrico e preferiamo quindi il metodo seguente.

Innanzi tutto si è mostrato che il numero delle rette parassite in uno degli spazî S ed S' è $n^2 - m^2x$ e dovrà essere certamente

$$n^2 - m^2x \geq 0 \tag{5}$$

ed essendo per la (1) $3m = n + 1$, si avrà

$$(9 - x)\,n^2 - (2n + 1)\,x \geq 0. \tag{6}$$

([1]) Berzolari, *Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre o a quattro dimensioni*. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. IX, 1895. Vedi § II, *d*).

([2]) Berzolari, Nota citata, § II, *e*).

Dovendo essere n ed x interi e positivi, è chiaro che dovrà essere

$$x < 9 .$$

Inoltre x non potrà essere minore di 4, poichè la γ_x deve possedere trisecanti.

Esaminiamo dunque le curve di ordini compresi tra 3 e 9 e scartiamo quelle che hanno quadrisecanti e quelle che, non avendone, non soddisfano al sistema delle (1), (2) e (3) ([1]).

Una curva dell' 8° ordine γ_8 può essere di genere da 0 a 9. Una γ_8 di genere 9 (per la quale è $h = 12$) è intersezione di una quadrica F_2 con una superficie del 4° ordine F_4 ed una γ_8 di genere 8 (per la quale è $h = 13$) è intersezione parziale di una F_2 con una F_5. Entrambe queste curve sono da scartare, perchè ammettono infinite quadrisecanti oppure cinquesecanti.

Una γ_8 di genere 7 (per la quale è $h = 14$) ha per la formola (4) del Berzolari sempre una quadrisecante e quindi anch'essa è da scartare. Tutte le altre curve γ_8 di generi inferiori a 7 ammettono poi rispettivamente 5, 10, 16, 23, 31, 40, 50 quadrisecanti, sicchè sono tutte da scartare.

Non potrà essere quindi $x = 8$.

Per $x = 7$, procedendo analogamente la sola γ_7 di genere 5, intersezione parziale di due F_3, non ha quadrisecanti ([2]). Per questa γ_7 si ha $x = 7$, $h = 10$, $n = 15$, $m = 5$ ed essa è pure da scartare perchè per questi numeri non si verifica ad es. la relazione $3m = n + 1$.

Procedendo analogamente pel caso di $x = 6$, si ha che la sola curva che dà una soluzione del sistema (1), (2), (3) e (4) è la γ_6 di genere 3.

Per $x = 5$ si ha una soluzione per la γ_5 di genere 1 ([3]) e per $x = 4$ si ha una soluzione per la γ_4 di genere 0.

([1]) Per questo esame, basta tener presente: Halphen, *Sur la classification des courbes gauches algébriques.* Journal de l'École Polytech., LII cahier, 1882, e Nöther, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven.* Sitzungsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften, st. XXXII, 1883.

([2]) Questa curva è stata più specialmente studiata dal prof. Montesano, il quale nella Nota *Su di un sistema lineare di coniche dello spazio*, Atti dell'Acc. di Torino, vol. XXVII, 1882, dimostra che essa determina completamente una rete di superficie di 3° ordine, e dà luogo ad una congruenza lineare di coniche.

([3]) Di questa curva γ_5 di genere 1 si è dapprima occupato il Weyr, il quale in due Note pubblicate nei Sitz. Ak. Wien (B. XC e XCII) ha studiato semplicemente alcune involuzioni di punti che si hanno sulla curva. E più diffusamente si è occupato di essa il prof. Montesano nella Nota *Su la curva gobba di 5° ordine e di genere 1.* Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli, fasc. 6°, giugno, 1888. In quest' ultima Nota sono pure studiate le caratteristiche elementari del sistema di coniche appoggiate in 5 punti alla curva data.

Quindi si hanno tre sole soluzioni del sistema ([1]) e sono le seguenti:

12. La soluzione α) corrisponde ad una superficie F_2^6 del 6^o ordine, che ammette 10 piani che la segano secondo cubiche (perchè $n^2 - m^2 x = 10$).

$$\alpha) \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ h = 7 \\ m = 3 \\ n = 8 \end{array} \right. \qquad \beta) \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ h = 5 \\ m = 2 \\ n = 5 \end{array} \right. \qquad \gamma) \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ h = 3 \\ m = 1 \\ n = 2 \end{array} \right.$$

Per un punto dello S_4 passa una sola trisecante della F_2^6, mentre per un

([1]) Volendo risolvere invece direttamente il sistema delle (1), (2), (3) e (4) si può procedere così:

Eliminiamo tra (1), (2) e (3) la m e la h, si otterrà

$$2n(x-5) = (x-2)^2 (x-5) \tag{7}$$

e quindi potrà essere o $x = 5$ oppure $2n = (x = 2)^2$.

Per $x = 5$ la (4) ci fornisce 2 valori per h e precisamente $h = 5$ oppure $h = 4$. Quindi avremo corrispondentemente

$$\beta) \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ h = 5 \\ m = 2 \\ n = 5 \end{array} \right. \qquad \beta') \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ h = 4 \\ m = 1 \\ n = 2 \end{array} \right.$$

la soluzione numerica β') è però da scartare, poichè ad es. $n^2 - m^2 x$ è negativo. La β) è da ritenere.

Considerando poi che sia $2n = (x-2)^2$, sostituiamo nel sistema proposto questa equazione alla (3) ed eliminiamo tra questa, la (1) e la (2) le m ed n, si ha

$$h = \frac{x^2 + 2x - 6}{6}.$$

Sostituendo poi questo valore di h in funzione di x nella (4), dopo aver moltiplicato ambo i membri di essa per 2, si ottiene riducendo e cambiando i segni a tutta l'equazione

$$2x^4 - 34x^3 + 203x^2 - 486x + 360 = 0. \tag{8}$$

Questa equazione ammette certamente per radici $x = 6$ e $x = 4$ corrispondenti a due superficie F_2^6, F_2^4, già conosciute e che dovevamo aspettarci come soluzioni. Sicchè dividendo il primo membro della (8) per $x^2 - 10x + 24$, si ottiene

$$2x^2 - 14x + 15 = 0. \tag{9}$$

Ora questa equazione ha per radici $x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{2}$, vale a dire fornisce per x valori inaccettabili. Quindi le altre soluzioni oltre (β), sono date da

$$\alpha) \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ h = 7 \\ m = 3 \\ n = 8 \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad \gamma) \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ h = 3 \\ m = 1 \\ n = 2 \end{array} \right.$$

E si hanno così le tre soluzioni, già avute per altra via più geometrica.

punto della F_2^6 le trisecanti che vi passano costituiscono un cono cubico. Uno spazio S_3 seca la superficie in una γ_6 di genere 3 multipla secondo 3 per la superficie di ottavo ordine delle sue trisecanti, ecc.

Ciò basta a far riconoscere in essa la superficie F_2^6 del Veronese, che è generabile mediante 4 reti proiettive di spazî (¹).

13. La soluzione β) corrisponde ad una superficie F_2^5 del 5° ordine che ha 5 piani che la segano secondo cubiche (perchè $n^2 - m^2x = 5$). Per un punto della superficie passa un cono quadrico di trisecanti. Uno spazio S_3 qualunque la sega in una γ_5 di genere 1 doppia per la superficie di 5° ordine costituita dalle sue trisecanti, ecc.

La soluzione γ) corrisponde ad una superficie F_2^4 che non ha piani che la segano secondo cubiche (perchè $n^2 - m^2x = 0$). Per un punto della superficie passa un fascio di raggi di trisecanti della F_2^4. Uno di questi piani taglia la superficie nel centro del fascio di raggi e in una conica. Uno spazio qualunque seca la superficie in una curva γ_4 di genere 0 doppia per la superficie costituita dalle sue trisecanti, ecc. Questa superficie è anche conosciuta (²).

14. Abbiamo così determinato tre superficie F_2^6, F_2^5 ed F_2^4 ciascuna delle quali può determinare un complesso lineare di trisecanti, di cui essa è superficie focale. Per caratterizzare quindi questo complesso ci occuperemo un po' diffusamente delle superficie F_2^5 ed F_2^4, essendo la F_2^6 stata completamente studiata. Ma ciò sarà oggetto di un'altra Nota.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 3$. Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. In una precedente Nota ho determinato le superficie di genere lineare $p^{(1)} = 2$ (e di genere superficiale $p > 0$).

Mi propongo di effettuare qui l'analoga ricerca per $p^{(1)} = 3$. Per semplicità mi riferirò ancora a superficie (regolari) di genere

$$p_n = p_g = p > 0 ,$$

e supporrò inoltre che esse abbiano curve canoniche irriducibili (senza esclu-

(¹) Veronese e Bordiga, Mem. citate. Questa superficie, come nota il Bordiga, era però già nota al Caporali che ne aveva dato notizia nella Nota *Sopra i sistemi lineari di curve algebriche piane* (Milano, 1879, Hoepli).

(²) Vedi ad es. Del Pezzo: *Sulle superficie dell' n^{mo} ordine immerse nello spazio ad n dimensioni*. Rend. del Circ. mat. di Palermo t. I, fasc. 4, 1887.

Di questa superficie F_2^4 mi sono occupato anch'io nella Nota citata nella prima pagina della presente.