ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

13. Chiuderemo finalmente con una osservazione. Le trisecanti della F_2^5 nella precedente rappresentazione in S sono costituite dal sistema di rette che si appoggiano ad a, b.

Ora quando la V_3^3 si rappresenta nello spazio ordinario mediante delle $\Phi_3 \equiv C_4\, ab$, questo sistema di 1° ordine di rette della V_3^3 non è generabile mediante reti proiettive di spazî. È un caso di eccezione segnalato dal prof. Segre (1).

Ciò comprova ancora una volta di più che la F_2^5 non può essere un caso particolare della F_2^6 del Veronese.

14. Avendo con ciò che si è detto caratterizzato le tre superficie F_2^6, F_2^5 ed F_2^4 che determinano ordinatamente complessi di 1° ordine di trisecanti, di cui ciascuna è superficie focale, lo studio di questi complessi diventa ovvio, come pure sarà facile cosa esaminare i complessi dello spazio ordinario che si ottengono come proiezioni di quelli. Quindi tale studio può tralasciarsi o tutt' al più potremo occuparcene in altra Nota.

Matematica. — *Sull' operazione funzionale rappresentata da un integrale definito riguardata come elemento d' un calcolo.* Nota del dott. Adolfo Viterbi, presentata dal Socio Bianchi.

Nella presente Nota mi propongo di dare un' esposizione sommaria di alcuni risultati a cui pervenni in altro mio lavoro recante lo stesso titolo, nel quale ebbi per scopo « considerata l' operazione funzionale rappresentata da un integrale definito come elemento d' un calcolo, di svolgere i fondamenti generali d' un calcolo siffatto ». Qui mi limito ad esporre soltanto i teoremi stabiliti in detto lavoro: in esso si trovano le loro dimostrazioni e in esso trovansi pure le citazioni di altri lavori che furono scritti da varî autori intorno all' operazione in parola.

L' operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, come si sa, consiste in ciò: « Data una certa funzione $f(y_1)$ della variabile, in generale complessa y_1, la quale sia analitica e uniforme in un certo campo, si moltiplica per una funzione analitica $a(y_1 y_2)$ delle variabili indipendenti, in generale complesse $y_1 y_2$ e quindi si integra l' espressione così ottenuta rispetto ad y_1 lungo una certa linea, la quale cada entro il campo in cui $f(y_1)$ è atta a rappresentare una funzione analitica ». Le proprietà essenziali di detta operazione dipendono dalla funzione $a(y_1 y_2)$, la quale si dice « funzione caratteristica » dell' operazione in parola. Ora, nel calcolo da me studiato, l' operazione rappresentata da un integrale definito vien riguardata

(1) Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni.* Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. II, t. XXXIX, vedi § 12.

come ente arbitrariamente variabile, suscettibile cioè d'assumere infinite determinazioni diverse, in base al fatto che ciascuna speciale determinazione dell'accennata operazione è fissata quando siano fissate e la funzione caratteristica e la linea d'integrazione relative all'operazione stessa. In pari tempo le funzioni, a cui si supporranno applicate le operazioni che si considereranno, saranno fisse. Nell'accennato lavoro, come pure in questa Nota, mi limitai a dare un abbozzo generale del calcolo in parola, riserbandomi di studiare le questioni speciali che in esso si possono presentare e di mostrarne la portata e le applicazioni in successivi lavori. Così furono in detto calcolo definite operazioni facenti riscontro alle operazioni fondamentali dell'aritmetica, prendendo in questo a base anche considerazioni svolte da altri, e fu data un'estensione del concetto di funzione.

1. Per esporre i fondamenti del calcolo da me studiato mi permetto di porre le seguenti convenzioni:

a) Si designerà colla denominazione « operazione I » in generale un'operazione funzionale qualsiasi rappresentata da un integrale definito, determinata o variabile. Questa denominazione farà cioè, nel calcolo ora studiato, riscontro alla denominazione « quantità » che si usa nel calcolo ordinario e colla quale si può intendere tanto un ente suscettibile d'aumento o diminuzione che sia determinato, quanto un ente siffatto che sia variabile.

b) Nelle operazioni I che si considereranno in seguito, si farà astrazione dalle speciali variabili che in esse figurino sia come variabile d'integrazione, sia come variabile da cui dipende la funzione risultato: si considererà cioè solo la forma della funzione caratteristica e della linea d'integrazione relative alle operazioni I. Quando poi s'abbiano ad esaminare casi concreti d'operazioni I applicate a speciali funzioni, casi nei quali pur si dovrà porre in evidenza sia la variabile d'integrazione, sia quella da cui dipende la funzione risultato, per rendere più semplici le notazioni, si sottintenderà quanto segue: « Quando si parli d'un'operazione I, sia determinata, sia variabile, applicata ad una funzione, s'intenderà che sia y_1 la variabile d'integrazione, che naturalmente è anche quella da cui dipende la funzione oggetto, con y_2 la variabile da cui dipende la funzione risultato; quando poi si parli di due operazioni I consecutive applicate ad una certa funzione, mentre nella prima d'esse, in base a quanto fu detto testè, si deve intendere che sia y_1 la variabile d'integrazione, y_2 l'altra, nella seconda s'intenderà che sia y_2 la variabile d'integrazione, y_3 l'altra. E così quando s'abbia ad esaminare la funzione risultato di h (h numero intero qualunque > 2) operazioni I applicate ad una certa funzione, s'intenderà che la variabile, da cui essa dipende, sia y_{h+1}, e che le variabili d'integrazione siano per la prima di dette operazioni y_1, per la seconda y_2 ... per la h^{esima} y_h.

c) Per semplicità, per rappresentare operazioni I determinate, useremo, seguendo in ciò l'esempio del prof. Pincherle, le lettere maiuscole dell'alfabeto A, B ... anche apponendo a queste degli indici quando l'uso lo richieda; per rappresentare un'operazione I variabile, nella quale cioè, a differenza di quelle a cui ora si accennò, la linea d'integrazione e la funzione caratteristica siano suscettibili d'assumere infinite determinazioni distinte, s'adotterà il simbolo X, seguendo in ciò la consuetudine invalsa nel calcolo ordinario, e quando poi si abbia da ragionare su più operazioni I variabili, queste si potranno designare coi simboli X_1 X_2 ... . Il risultato d'un'operazione I determinata o variabile, da indicarsi quindi nel primo caso con A, nel secondo con X, applicata a una certa funzione di y_1, $f(y_1)$ si rappresenterà, seguendo anche in ciò l'esempio del prof. Pincherle, rispettivamente con $Af(y_1)$, $Xf(y_1)$.

d) Si prenderanno in considerazione, come funzioni-oggetto d'operazioni I soltanto funzioni uniformi; perciò quando si parlerà d'operazioni I applicate a una data funzione, si sottintenderà che questa funzione sia uniforme; così si parlerà di più operazioni I applicate successivamente a una data funzione, solo quando siano uniformi rispetto alla variabile da cui dipende la funzione-risultato le funzioni caratteristiche delle singole operazioni in esame, all'infuori della funzione caratteristica dell'ultima, la quale potrà anche non sodisfare a questa condizione. Del pari, parlando sia di funzioni oggetto d'operazioni I, sia di funzioni risultato di queste operazioni applicate a certe funzioni, ci si riferirà naturalmente solo ai valori degli enti, dei quali ci si occupa, situati nel campo, in cui detti enti sono atti a rappresentare funzioni analitiche.

e) Quando, fissata una certa funzione di y_1, $f(y_1)$, si abbia un'operazione I determinata che si designerà con A tale che $Af(y_1) = pf(y_2)$, essendo p un fattore che in base alla convenzione *b* si dovrà riguardare come funzione di y_2, si dirà « che A è equivalente a p relativamente a $f(y_1)$ e si rappresenterà ciò scrivendo $A = p$ relativamente a $f(y_1)$ » (prescindendo naturalmente dalla notazione con cui si rappresentano le variabili). Con ciò si viene dunque a riguardare l'applicazione d'un'operazione I ad una certa funzione come una moltiplicazione simbolica.

Così, ponendo la convenzione di riguardare due operazioni I che, applicate ad una stessa funzione assunta come funzione oggetto, diano lo stesso risultato, come equivalenti relativamente a detta funzione, riferendoci al caso dianzi esaminato, diremo che: « A, relativamente a $f(y_1)$, è equivalente all'altra operazione I, avente per funzione caratteristica $\frac{p}{2\pi i(y_1 - y_2)}$, per linea d'integrazione una linea chiusa situata nel piano y_1, contenente il solo punto $y_1 = y_2$ e nessun punto singolare della funzione $f(y_1)$ ». Quando, prese in esame due operazioni I determinate A, B s'abbia $Af(y_1) - Bf(y_1) = qf(y_2)$, q essendo in generale una funzione di y_2, si dirà « che A, B differiscono per q relativamente a $f(y_1)$ e si scriverà $A - B = q$ relativamente a $f(y_1)$ ».

È poi chiaro che un' operazione I, da applicarsi ad una certa funzione $f(y_1)$, la quale abbia per funzione caratteristica una funzione della forma $\frac{p}{2\pi i(y_1 - y_2)}$, p designando una funzione della sola y_2, o una costante per linea d'integrazione una certa linea λ_1 che sia chiusa, contenga il punto $y_1 = y_2$ e nessun punto singolare della funzione $f(y_1)$, trasformerà $f(y_1)$, qualunque essa sia in $pf(y_2)$, vale a dire la moltiplica per p (a prescindere dalla variabile di cui essa è funzione). Si dirà allora che « l'operazione I considerata è equivalente a p, in via assoluta, cioè indipendentemente dalla speciale funzione oggetto a cui possa essere applicata ».

Un' operazione I, della natura di quella testè definita, si rappresenterà col simbolo: $\bar{\mathrm{I}}p$: così quando sia $p = 1$ si designerà col simbolo $\bar{\mathrm{I}}$.

2. *Estensione delle quattro operazioni fondamentali dell' aritmetica.*

Per definire le operazioni analoghe alle quattro operazioni fondamentali dell' aritmetica da eseguirsi sulle operazioni I, non porta alcuna differenza il considerare operazioni I determinate, o operazioni I variabili, precisamente come nel calcolo ordinario le quattro operazioni fondamentali si eseguiscono indifferentemente *su* quantità determinate o *su* quantità variabili. Qui si definiranno adunque le quattro operazioni in parola, trattando di operazioni I determinate.

a) Addizione e sottrazione. — Date n (n sia un numero intero qualunque) di operazioni I che designeremo rispettivamente con A , B ... P si dirà « addizione di queste n operazioni l'operazione mediante la quale dalle singole, AB ... P si passa all'altra $A + B \ldots + P$ ». Quest' ultima consiste, quando si deve eseguire *su* una data funzione, nell' applicare a questa successivamente le singole operazioni A , B ... indi nell' addizionare i risultati.

L' operazione: $A + B \ldots + P$ si dirà « somma delle A , B ... P », le quali si diranno addendi. Nel caso particolare, in cui ciascuno degli addendi sia una stessa operazione: A, detto ancora n il numero di questi, la loro somma si rappresenterà con nA, indicandosi con questo simbolo l'operazione che consiste nell' applicare a una data funzione oggetto l'operazione A, indi nel moltiplicare per n. (Analoga notazione s'userà poi anche se il fattore n fosse anzichè una costante, una funzione).

Per l'addizione quale fu testè definita si ha il seguente:

Teorema. Per l'addizione delle operazioni I valgono tutte e tre le leggi: associativa, commutativa e distributiva che valgono per l'addizione definita dall' aritmetica.

La sottrazione delle operazioni I non differisce sostanzialmente dall' addizione: infatti è chiaro che la sottrazione d'un' operazione I la cui funzione caratteristica sia $a(y_h\, y_{h+1})$ (h, indice variabile secondo i casi, in base alla convenzione $b - 1$) da un' altra operazione I qualunque, si può riguardare come l'addizione di quest' ultima con un' altra che non differisca dalla precedente se non per avere, per funzione caratteristica, $-a(y_h y_{h+1})$ anzichè $a(y_h y_{h+1})$.

b) Moltiplicazione. — Definizione di potenza d'un'operazione I. Siano due operazioni I designate al solito con A, B. Si dirà « moltiplicazione dell'operazione A per l'operazione B, l'operazione mediante la quale dalla A si passa all'operazione I nella quale la linea d'integrazione è la stessa di A, la funzione caratteristica è la funzione ottenuta applicando la B alla funzione caratteristica di A » (riguardando questa nell'applicarle B come funzione della sola variabile da cui dipende la funzione risultato). L'operazione I così ottenuta si dirà « prodotto di A per B » e si designerà col simbolo BA. Così, detta y_h (h indice variabile recando i casi, in base alla conv. b del n. 1) la variabile d'integrazione che figura nella A, y_{h+1} l'altra variabile; si dovrà designare con y_{h+1} la variabile d'integrazione che figura in B con y_{h+2} l'altra variabile che in essa figura. E la funzione che s'ottiene applicando la B alla funzione caratteristica di A sarà funzione delle variabili $y_h y_{h+2}$.

Dette rispettivamente $a(y_h y_{h+1})$, $b(y_{h+1} y_{h+2})$ le funzioni caratteristiche di A, B, dette rispettivamente l, l_1 le linee d'integrazione (la prima delle quali sarà tracciata nel piano y_h, la seconda nel piano y_{h+1}) e detta al solito $f(y_1)$ una certa funzione di y_1 si avrà dunque:

$$\mathrm{BA}f(y_1) = \int_l \left(\int_{l_1} b(y_2 y_3)\, a(y_1 y_2)\, dy_2 \right) f(y_1)\, dy_1$$

Delle due operazioni AB si dirà la prima moltiplicando, la seconda moltiplicatore: entrambe poi si designeranno col nome di fattori.

Con un'ovvia estensione delle precedenti considerazioni si definiscono la moltiplicazione e il prodotto d'un numero qualunque > 2 d'operazioni I: trattandosi infatti d'eseguire la moltiplicazione di tre di esse: A, B, C; eseguita nel modo anzidetto la moltiplicazione di A per B, si eseguisce quella dell'operazione BA così ottenuto, giungendo in tal guisa al prodotto CBA.

Un caso particolare importantissimo che si può presentare nella moltiplicazione delle operazioni I è quello in cui ciascuno dei fattori sia una stessa operazione: A (si dovrà naturalmente fare astrazione dalle speciali variabili che figurano in ciascun fattore). Così in ciascuna delle operazioni fattori, la funzione caratteristica avrà la stessa forma e la linea d'integrazione dovrà attraversare la stessa successione di valori nel piano in cui è tracciata. Il prodotto che in tal caso s'ottiene si dirà, con un'ovvia estensione d'un concetto dato dall'aritmetica « potenza dell'operazione A d'ordine m », ove m designi il numero dei fattori nella moltiplicazione che si eseguì, e la moltiplicazione stessa si dirà in tal caso « elevamento a potenza dell'operazione A ». E la potenza m^{sina} di A si rappresenterà con A^m. Per le potenze d'operazioni I sussistono le relazioni seguenti »: detta A un' operazione I qualunque, m, p due numeri interi positivi è: $A^m A^n = A^{m+n}$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

c) Divisione. — Date due operazioni I A e B, si dirà « divisione di A per B » l'operazione che consiste nella ricerca d'una terza operazione I che designeremo con C, tale che: $A = BC$. A si dirà dividendo, B divisore, C quoziente. Si rappresenterà il quoziente C colla notazione $\frac{A}{B}$ e si scriverà anche per semplicità: $A : B = C$.

La possibilità d'eseguire l'operazione testè definita, è fondata sulla risoluzione del problema detto « dell' inversione degli integrali definiti » cioè del problema che consiste in questo: « Data la funzione caratteristica e la linea d'integrazione d'una certa operazione I e data anche la funzione che s'ottiene applicando quest' operazione ad una funzione incognita, determinare quest'ultima funzione ». Invero, in base a precedenti definizioni, se C è il quoziente della divisione di A per B, inversamente si può dire che A è il prodotto di C per B: così la linea d'integrazione relativa a C è la stessa linea relativa ad A e detta $c(y_h y_{h+1})$ la sua funzione caratteristica (h abbia il significato che si diede a questo simbolo più sopra), $a\,(y_h y_{h+2})$ quella di A $c(y_h y_{h+1})$ è data dalla relazione: $a\,(y_h y_{h+2}) = B\, c(y_h y_{h+1})$. Ora del problema dell' inversione degli integrali definiti fu data la risoluzione in modo generale dal prof. Volterra (v. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei e Atti dell' Accad. delle Scienze di Torino, marzo 1896).

A complemento delle considerazioni esposte intorno alle potenze d'operazioni I, si osservi che detti ancora, m, n due numeri interi. A un' operazione I qualunque è: $\frac{A^m}{A^n} A^{m-r}$. Nel caso particolare in cui, avendosi da dividere una certa operazione I designata con A per un'altra B, sia:

$$A = BB^{m-1} = B^m$$

designando ancora m un numero intero positivo, B si dirà « radice m^{sima} di A » e questa sua proprietà si rappresenterà colla notazione:

$$B = \sqrt[m]{A} \quad \text{oppure coll' altra} \quad B = A^{\frac{1}{m}}$$

3. *Funzioni d'operazioni* I. — *a*) Definizioni fondamentali. Abbiasi ora una certa operazione funzionale rappresentata da un' espressione contenente una data operazione I variabile: X e sue potenze [1] si potrà ri-

[1] Con operazione contenente una data operazione I designata con X e sue potenze, si deve intendere un' operazione, la cui applicazione a una certa funzione consista nell'applicarle l'operazione X e sue diverse potenze combinate fra loro mediante le quattro operazioni fondamentali dell' aritmetica, nel senso che siano combinate fra loro in tal guisa i risultati delle operazioni I che compaiono nei singoli termini applicati alla funzione oggetto.

guardare detta espressione come una funzione di quest' operazione X nel senso che ad ogni speciale determinazione di quest' ultima, cioè della sua funzione caratteristica e della linea d' integrazione che le compete, corrisponde una determinazione o un certo numero di determinazioni dell' espressione in parola.

Si potranno poi considerare anche espressioni contenenti nel modo anzidetto diverse operazioni I variabili distinte in numero finito che si designaranno (1, *c*) con X_1 X_2... suscettibili, cioè, d' assumere determinazioni distinte e ciò indipendentemente l' una dall' altra, e contenenti anche potenze di queste diverse operazioni I, in modo che nei termini di quest' espressione compaiano anche ad es. prodotti o quozienti (simbolici) d' una di queste operazioni I per un' altra o anche per il prodotto di più altre. Una tale espressione si potrà riguardare come una funzione delle diverse operazioni I variabili che in essa compaiono, nel senso che ad ogni insieme d' una speciale determinazione di ciascuna di dette operazioni I corrisponde una determinazione o un certo numero di determinazioni dell' espressione considerata. Per rappresentare funzioni d' operazioni I s' useranno, come si fa nell' analisi ordinaria, i simboli: F(X), F(X_1 X_2...), Φ(X) ecc.

Ad evitare poi equivoci, stabiliremo sin d' ora che s' userà la semplice designazione di « funzione » quando si voglia indicare una funzione nel senso ordinario della parola, laddove s' userà la designazione speciale « funzione d' operazioni (una o più) I » quando si voglia indicare una funzione nel senso che è da attribuirsi a questo vocabolo nel calcolo che qui è studiato.

S' estenderanno alle funzioni d' operazioni I le definizioni date nel N. 1 (*e*) per le operazioni I. E di più si farà la convenzione seguente: « Si stabilirà cioè che nelle funzioni d' una o più operazioni I variabili, quando l' operazione rappresentata da tali funzioni debba applicarsi a una certa funzione oggetto, sia per ciascun termine la stessa la variabile da cui dipende la funzione-risultato » (vale a dire in ciascun termine la variabile da cui dipende la funzione-risultato sarà la stessa che figura nel termine in cui compare la potenza più alta dell' operazione I variabile, quando si tratti di funzioni d' una sola operazione variabile, e il prodotto (simbolico) di potenze delle diverse operazioni I variabili, la somma de' cui indici ha il valore più alto quando si tratti di funzioni di più operazioni variabili).

Si considereranno poi anche somme (e differenze), prodotti e quozienti di funzioni d' operazioni I. Il concetto di somma (e differenza) si ha senz' altro estendendo le considerazioni svolte per definire le quattro operazioni analoghe alle quattro operazioni fondamentali, per le operazioni I: così per prodotto d' una funzione d' operazioni I, designato ad es. con F(X) per un' altra Φ(X), s' intenderà la funzione dell' operazione X che s' ottiene applicando a F(X) l' operazione rappresentata da Φ(X), eseguendo le moltiplicazioni dei singoli termini di F(X), Φ(X) secondo la regola data al N. 2, per la moltiplicazione delle operazioni I. E senza difficoltà alcuna si giunge al concetto di prodotto di più funzioni d'operazioni I.

Così per divisione della funzione dell'operazione variabile X F(X) per l'altra funzione $\Phi(X)$ della stessa operazione variabile, s'intenderà l'operazione avente per scopo la determinazione d'una terza funzione $\Psi(X)$ dell'operazione X tale che:

$$F(X) = \Phi(X)\,\Psi(X)$$

Si dirà F(X) dividendo, $\Phi(X)$ divisore, $\Psi(X)$ quoziente: in generale però non si potrà determinare esattamente il quoziente in una divisione siffatta, ma si avrà:

$$F(X) = \Phi(X)\,\Psi(X) + R(X)$$

designando R(X) una nuova funzione dell'operazione variabile X che si dirà « resto della divisione in parola ».

Fisica terrestre. — *Il sismometrografo fotografico.* Nota del dott. G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Un'idea di questo apparecchio, la cui sensibilità deve essere senza paragone assai più grande dei recentissimi sismometrografi, anche nel caso in cui si voglia in questi diminuire ulteriormente gli attriti ed aumentare la moltiplicazione degli stili scriventi, è stata già da me data nelle ultime due pagine della mia Nota: *I terremoti di lontana provenienza registrati al Collegio Romano*, comunicata a codesta Accademia nella seduta del 2 giugno 1894 (1). Questo nuovo apparecchio sismico non è che una trasformazione ulteriore del mio *tromometro a registrazione fotografica*, che si trova ugualmente descritto in questi Rendiconti (2). Verso la fine dello stesso anno si presentò un'occasione propizia per tradurre in atto le modificazioni da me allora progettate. Designato ad organizzare in Turchia un servizio geodinamico, d'accordo con il mio direttore, il prof. P. Tacchini, fu deciso di far costruire per l'osservatorio sismico di 1° ordine da impiantarsi a Costantinopoli, oltre a una serie di svariati sismoscopî e a due sismometrografi sul genere di quello giusto allora installato al Collegio Romano, anche un modello del *sismometrografo fotografico* in questione.

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. III, 1° sem., pag. 543.

(2) P. Tacchini, *Sopra un tromometro a registrazione fotografica*, serie 4ª, vol. VI, pag. 432, seduta del 18 maggio 1890; id., *Dell'influenza del vento sopra il tromometro, a registrazione fotografica*, serie 4ª, vol. VII, pag. 133, seduta del 1° febbraio 1891; G. Agamennone, *Il tromometro a registrazione fotografica*, serie 5ª, vol. II, pag. 28, seduta dell'8 gennaio 1893.