ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 aprile 1897.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Un' estensione di alcuni concetti del calcolo infinitesimale.* Nota del dott. ADOLFO VITERBI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

In questa Nota mi propongo, riassumendo brevemente i risultati a cui pervenni in altro mio lavoro (1), di dare un' estensione di alcuni concetti fondamentali del calcolo infinitesimale al calcolo, di cui si riguardi come elemento l' operazione funzionale rappresentata da un integrale definito. In altra Nota che ebbi l' onore di presentare or non è molto (2), esposi i fondamenti di questo calcolo: così mi valgo ora delle convenzioni e delle definizioni poste in detta Nota. Qui mi limito ad enunciare i teoremi stabiliti nel citato lavoro, nel quale trovansi le loro dimostrazioni.

1. *Definizione di limite d' operazioni* I *e di funzione continua d' operazioni* I. — Preso a considerare un insieme d' operazioni I distinte, in generale in numero infinito, si dirà che « relativamente a una certa funzione assunta come funzione oggetto esse tendono ad un certo limite, quando la differenza fra due qualunque delle operazioni I del sistema considerato, relativamente a detta funzione, sia = ad una funzione (naturalmente dipendente

(1) *Sull' operazione funzionale rappresentata da un integrale definito riguardata come elemento d' un calcolo.*
(2) V. Rendiconti della seduta del 4 aprile 1897.

dalla variabile, da cui dipende, per le operazioni considerate, la funzione risultato) che per tutti i valori di detta variabile compresi nel campo in cui è funzione analitica e regolare, sia tale che il modulo della differenza tra essa e questo limite si mantenga inferiore ad una quantità assegnata piccola a piacere ». In base a ciò si possono facilmente agli insiemi d'operazioni I, considerate relativamente a una certa funzione oggetto, applicare le considerazioni svolte dal calcolo ordinario, per gli insiemi di quantità complesse (si giungerà così alla considerazione d'insieme limitato e determinazione limite d'una operazione I relativamente a una funzione oggetto). Nello stesso modo, si potrà, fissata una certa funzione F(X) d'un'operazione I variabile X, considerare l'insieme delle determinazioni che le competono, quando a X si diano successivamente le determinazioni comprese in un dato insieme Γ. Così, fissato quest'insieme Γ, F(X) si dirà: « limitata relativamente a una data funzione $f(y_1)$, nell'insieme Γ » quando l'insieme delle determinazioni di $F(X) f(y_1)$ corrispondenti a quelle di X comprese in Γ è un insieme limitato. Così si dirà che « F(X) è definita entro un dato campo (si userà la parola campo nello stesso significato che si dà a insieme) di determinazioni di X, relativamente a una determinata funzione $f(y_1)$ » quando per qualunque determinazione A compresa in questo campo, $F(A) f(y_1)$ sia atta a rappresentarci una funzione analitica. Le precedenti considerazioni si estendono senza difficoltà a funzioni di più operazioni I variabili.

« Una funzione F(X) dell'operazione I variabile, X si dirà continua relativamente a una funzione oggetto assegnata $f(y_1)$, per una certa determinazione di X » quando detta A questa determinazione per qualunque valore che si assegni alle quantità ε, si può determinare un'altra quantità δ tale che:

$$(1) \qquad |F(A+\overline{I}_\eta) f(y_1) - F(A) f(y_1)| < \varepsilon \text{ [1]}$$

per ogni valore della variabile da cui dipende la funzione $F(X) f(y_1)$ pel quale la differenza che comparisce nel primo membro della (1) è atta a rappresentare una funzione analitica regolare, ogniqualvolta: $|\eta| < |\delta|$ se η è costante e ogniqualvolta sia, in modulo $< |\delta|$ il limite superiore di η, per i valori della variabile da cui dipende che vengono presi in considerazione, se η stesso è una funzione. E se le disuguaglianza (1) sussiste per tutte le determinazioni di X comprese in un certo insieme assegnato Γ. F(X) si dirà « continua relativamente a $f(y_1)$ entro Γ ». Si dirà poi « continua uniformemente, sempre relativamente a $f(y_1)$ » se si può trovare una quantità δ, tale che quando sia $|\eta| < |\delta|$ o sia $< |\delta|$, in modulo, il limite superiore di η nel campo costituito dai valori della variabile, da cui dipende che vengono presi in considerazione, a seconda che rispettivamente si presentano l'uno o l'altro

[1] Quando da un'operazione I qualunque A si passa all'altra $A + \overline{I}_\eta$, si dirà che ad A si diede l'incremento $\overline{I}_\eta$.

dei casi dianzi distinti, la (1) sussista qualunque sia ε per ogni determinazione di X compresa in E.

Così presa in esame una funzione di più operazioni I variabili: $X_1, X_2 ... X_n$, funzione che designeremo con $F(X_1 X_2 ... X_n)$ questa si dirà « continua relativamente a una funzione oggetto assegnata $f(y_1)$ rispetto a una qualunque delle operazioni variabili che in essa figurano, ad es. rispetto a X_1, per una certa determinazione di questa, o in tutto un campo », quando, date a $X_2, ... X_n$ altrettante determinazioni fisse, in guisa da riguardare $F(X_1, X_2 ... X_n)$ come funzione della sola X_1, essa rende soddisfatta la condizione onde si verifichi, secondo quanto fu più sopra esposto, rispettivamente l'una o l'altra delle circostanze dianzi accennate. Si dirà poi $F(X_1 X_2 ... X_n)$ « continua relativamente a $f(y_1)$ rispetto a tutte le operazioni variabili che in essa figurano per una certa determinazione A, B ... P del loro insieme (cioè per la determinazione A di X_1, B di X_2 ... C di X_n) » se per qualunque valore che s'assegni alla quantità ε se ne può determinare un'altra δ tale che:

$$(2) \qquad |F(A + \bar{I}_{\eta_1}, ... P + \bar{I}_{\eta_n}) f(y_1) - F(A, ... P) f(y_1)| < \varepsilon$$

per ogni valore della variabile da cui dipende la funzione $F(X_1, ... X_n) f(y_1)$ situato nel campo in cui la differenza che comparisce nel primo membro della (2), è atta a rappresentarci una funzione analitica regolare ogniqualvolta siano $< |\delta|$ tutte le $|\eta_1|, ... |\eta_n|$ se le $\eta_1 ... \eta_n$ sono costanti o i limiti superiori rispettivi di queste quantità nell'insieme dei valori della variabile da cui dipendono, che vengono presi in considerazione, se esse sono funzioni. Nello stesso modo si definiscono facilmente le condizioni necessarie sia per la continuità in generale, sia per la continuità uniforme di $F(X_1, ... X_n)$ relativamente a una funzione oggetto assegnata, in un intero campo di determinazioni dell'insieme $X_1, X_2 ... X_n$.

2. *Derivazione delle funzioni d'operazioni* I *rispetto alle operazioni variabili da cui dipendono.* — *a*) Derivazione di funzioni d'una sola operazione variabile. — Sia F(X) una funzione d'un'operazione I variabile X_1. Si consideri un'operazione I della forma $\bar{I}_w$, ove designi w una costante arbitraria indi, detta A una certa determinazione speciale di X si consideri la differenza (simbolica) $F(A + \bar{I}_w) - F(A)$ e ad essa si applichi l'inversa dell'operazione $\bar{I}_w$, cioè l'operazione che trasforma il risultato di $\bar{I}_w$ applicata ad una funzione oggetto qualunque nella funzione stessa. L'operazione, che consiste nell'applicare a: $F(A + \bar{I}_w) - F(A)$ quest'operazione inversa di $\bar{I}_w$, sarà da designarsi col nome di quoziente di $F(A + \bar{I}_w) - F(A)$ diviso per $\bar{I}_w$ e sarà, in base alle notazioni adottate da rappresentarsi col simbolo:

$$(3) \qquad \frac{F(A + \bar{I}_w) - F(A)}{\bar{I}_w}.$$

Si consideri quindi il limite a cui tende l'espressione (3) per $\overline{\mathrm{I}}_w$ (1) tendente a ridursi a 0 (in via assoluta), il che avviene quando w tende a 0: se esiste per la (3) un'espressione-limite determinata, questa si designerà col nome di « derivata prima di F(X) rispetto ad X (o semplicente: derivata prima di F(X), calcolata per la determinazione A di X ». Estendendo la notazione che si usa nel calcolo ordinario, rappresenteremo tale derivato con $F_A'(X)$ oppure con $\left(\frac{dF(X)}{dF}\right)_{X=A}$. Così, considerata F′(X) come una nuova funzione dell'operazione I variabile X, la sua derivata prima calcolata per una determinazione qualunque di X, che si designerà ancora con A, si dirà « derivata seconda di F(X) calcolata per la determinazione A di X » e si rappresenterà con $F_A''(X)$ oppure con $\left(\frac{d^2F(X)}{dX^2}\right)_{X=A}$. E così di seguito si definiranno le derivate di F(X) d'ordine terzo, quarto, ecc. ecc.

Quando poi s'abbia a considerare il risultato dell'operazione rappresentata da F(X) applicata ad una certa funzione oggetto $f(y_1)$, si possono calcolare nello stesso modo, con cui ciò si fece dianzi, le derivate di qualunque ordine di $F(X)f(y_1)$ rispetto a X (qui si dovrà sempre aggiungere quest'ultima designazione, ad evitare equivoci) e si avrà $\left(\frac{dF(X)f(y_1)}{dX}\right)_{X=A} = \left(\frac{dF(X)}{dX}\right)_{X=A} f(y_1)$ e s'avranno formole analoghe per le derivate successive.

Per la derivazione di funzioni d'un'operazione I variabile, quale fu testè definita, si hanno le seguenti proprietà:

1ª Inteso per fattore costante rispetto a una certa operazione I variabile, sia una quantità costante nel senso ordinario della parola o una funzione di certe variabili, sia anche un'operazione I od una funzione d'operazioni I che non la contenga, e detto C un fattore costante rispetto all'operazione I variabile X da noi considerata, si ha, intendendo sempre per F(X) una funzione dell'operazione X; per A una certa determinazione di X:

I. $$\left(\frac{dCF(X)}{dX}\right)_{X=A} = C\left(\frac{dF(X)}{dX}\right)_{X=A}, \quad \frac{dC}{dX} = 0$$

II. $$\left(\frac{dX^m}{dX}\right)_{X=A} = mA^{m-1} \ldots \left(\frac{d^{m-1}X^m}{dX^{m-1}}\right)_{X=A} = \underline{|m}\, X \left(\frac{d^m X^m}{dX^m}\right)_{X=A} = \underline{|m}$$

in via assoluta.

Si hanno poi i seguenti teoremi:

I. La derivazione di funzioni d'una data operazione I variabile, rispetto a questa è permutabile all'addizione (e quindi alla sottrazione).

(1) Avendo $\overline{\mathrm{I}}_w$ significato d'incremento da darsi all'operazione X, si potrà anche rappresentare con ΔX, seguendo in ciò la consuetudine invalsa nel calcolo ordinario.

II. Dette $F(X)$, $\Phi(X)$ due funzioni dell' operazione I variabile X si ha:

$$(3)\qquad \left(\frac{d\{F(X)\,\Phi(X)\}}{dX}\right)_{X=A} = \left(\frac{dF(X)}{dX}\right)_{X=A}\Phi(A) + F(A)\left(\frac{d\Phi(X)}{dX}\right)_{X=A}$$

e applicando la formola (3) per le derivate successive della funzione dell'operazione X: $F(X)\,\Phi(X)$ si ha una regola perfettamente analoga a quella del Leibniz data dal calcolo infinitesimale.

III. Mantenendo ai simboli F, Φ, A il significato loro dato per l' addietro si ha:

$$\left(\frac{d\,\dfrac{F(X)}{\Phi(X)}}{dX}\right)_{X=A} = \frac{\Phi(A)F_A'(X) - \Phi_A'(X)F(A)}{(\Phi(A))^2}.$$

b) Derivazioni di funzioni di più operazioni I variabili. — La derivazione di funzioni di più operazioni I variabili si definisce nello stesso modo di quella di funzioni d'una sola operazione siffatta. Detto cioè n il numero delle operazioni variabili da considerarsi, si dà a $n-1$ di queste una determinazione fissa, considerando la funzione come dipendente solo n^{esima} operazione variabile. Si deriva poi rispetto a questa operazione X_i ($i = 1, 2 \ldots n$) e s' ottiene quella che si dirà: « derivata parziale del primo ordine della funzione considerata rispetto a X_i ». Così si definiscono e si studiano anche le derivate delle derivate del primo ordine della funzione in parola: e di queste si diranno « derivate parziali pure » quelle in cui la derivazione fu fatta rispetto a una sola operazione variabile a « derivate parziali miste » le altre. Si useranno anche qui notazioni analoghe a quelle che si usarono nel calcolo ordinario.

Sulle derivate parziali miste ora definite si ha poi il seguente:

Teorema: « Nel calcolare le derivate parziali miste di qualunque ordine d' una funzione di più operazioni I variabili, le derivate che s' ottengono sono sempre le stesse, qualunque sia l' ordine con cui si eseguiscono le derivazioni »

Valgono poi anche per le derivate parziali delle funzioni di operazioni I i teoremi accennati in *a*.

Come per le funzioni d' una sola operazione I variabile si ha, mantenendo ai simboli $f(y_1)$, $F(X_1 \ldots X_n)$, A, B ... P il significato loro dato fin qui:

$$\left(\frac{\partial F(X_1 \ldots X_r)\,f(y_1)}{\partial X_1}\right)_{X_1 = A \ldots X_n = P} = \left(\frac{\partial F(X_1 \ldots X_r)}{\partial X_1}\right)_{X_1 = A \ldots X_n = P} f(y_1) \text{ ecc. ecc.}$$

Si avverta però che affinchè queste ultime espressioni siano atte a rappresentarci funzioni analitiche, è necessario che detto ΔX_1 l' incremento da darsi alla operazione X_1 quando ad es. si voglia la derivata di $F(X_1 \ldots X_r)\,f(y_1)$ rispetto a questa operazione I variabile, esso deve esser tale che $A + \Delta X_1$ appartenga ancora al campo delle determinazioni di X_1 per le quali $F(X_1 \dots X_n)\, f(y_1)$ è atta a rappresentarci una funzione analitica. È poi del pari necessario affinchè si verifichi quanto sopra che $F(X_1 \dots X_n)$ sia per $X_1 = A \dots X_n = P$, continua relativamente a $f(y_1)$, rispetto a X_1. Ciò vale naturalmente anche per funzioni d'una sola operazione I variabile.

c) Estensione della formula di Taylor. Per le forme lineari alle potenze d'una o più operazioni I variabili si può dare una formola analoga a quella di Taylor. Così, detta ad es. F(X) una forma lineare d'ordine (per ordine della forma intendasi anche qui l'indice della più alta potenza di X che comparisce in essa) m alle potenze dell'operazione I variabile X e detta w una costante nello stretto senso della parola, A una determinazione arbitraria di X si avrà:

$$F(A + \bar{I}_w) = F(A) + \bar{I}_w F'(A) + \cdots \frac{\bar{I}_w^{\,\nu-1}}{\underline{|\nu - 1}} F^{\prime(\nu-1)}(A) + \frac{\bar{I}_w^{\,\nu}}{\underline{|\nu}}\,.$$

3. Si possono studiare nel calcolo, del quale ci occupiamo, anche serie di potenze d'una o più operazioni I variabili: e si possono dare anche di queste le derivate successive rispetto alle operazioni I che in esse figurano, e la formola analoga a quella del Taylor. Quando poi si consideri la funzione che s'ottiene applicando l'operazione rappresentata da una serie di potenze d'una o più operazioni I variabili ad una certa funzione oggetto, si presenta la questione di stabilire se per le accennate funzioni vi sia e quale sia un campo di determinazioni delle operazioni variabili da cui dipendono, tale che per ogni determinazione compresa in esso le serie che le rappresentano siano convergenti.

4. *Estensione del concetto d'integrazione.* — *a*) Integrale definito. Si consideri una funzione d'un'operazione I variabile X, funzione che designeremo al solito con F(X): indi, fissata una certa funzione $f(y_1)$ nel campo $\boldsymbol{\Gamma}$ di determinazioni di X nel quale F(X) è definita relativamente a $f(y_1)$, si assumano ad arbitrio due determinazioni fisse A , B di X : se è y_μ la variabile da cui dipende $F(X)\, f(y_2)$, A , B differiranno fra loro relativamente a $F(X)\, f(y_1)$ per una certa funzione (variabile con X) di $y_{\mu+1}$ (v. altra Nota citata) che si designerà con $p(y_{\mu+1})$. Ciò posto si fissi una successione di determinazioni di X comprese in $\boldsymbol{\Gamma}$, determinazioni che si designeranno con $A_1, A_2 \dots A_q$. Così sarà:

$A_1 F(A)\, f(y_1) - A F(A)\, f(y_1) =$ ad una certa funzione (determinata) di $y_{\mu+1}$ che si designerà con δ_0.

$A_2 F(A_1) f(y_1) - A_1 F(A_1) f(y_1) =$ ad una certa funzione (determinata) di $y_{\mu+1}$ che si designerà con δ_1.

. . . .

$B F(A_q) f(y_1) - A_q F(A_q) f(y_1) =$ ad una certa funzione (determinata) di $y_{\mu+1}$ che si designerà con δ_q.

Allora con un'ovvia estensione di concetti dati dal calcolo ordinario si dirà che, fissando la successione di determinazioni di $X : A_1, A_2 \dots A_q$ nel modo anzidetto « si è suddivisa la differenza tra B, A relativamente a $F(X)f(y_1)$ in porzioni di $\delta_h (h = 0, 1 \dots q)$ ». Ciò posto si faccia la somma dei prodotti delle δ_h per le $F(A_h)f(y_1)$ $(h = 0, 1, 2 \dots q)$ ove per simmetria nella notazione si designi A con A_0). Questa somma sarà: $\sum_h \delta_h F(A_h) f(y_1)$ e si designerà brevemente con S. Ora, quando al tendere delle δ_h simultaneamente e indefinitamente a 0 quella somma ammetta un limite determinato, quel limite, per l'analogia che presenta coll'integrale definito che si studia nel calcolo infinitesimale, si dirà « integrale definito della funzione dell'operazione I variabile $X : F(X)$ relativamente alla funzione $f(y_1)$, calcolato fra i limiti B, A (oppure anche integrale definito di $F(X)f(y_1)$, calcolato fra gli accennati limiti) rispetto a X ». Esso si rappresenterà col simbolo $\int_A^B F(X) f(y_1) dX$, (A, B) si diranno « estremi d'integrazione ».

E riguardo all'integrale fu testè definito, si ha il:

Teorema. — Quando $F(X)$ sia continua entro Γ relativamente a $f(y_1)$, $\lim_{\delta_d = 0} S$ esiste determinato, finito e indipendente dal modo particolare, con cui si fanno decrescere le δ_4.

Con un'ovvia estensione dei concetti ora esposti, data una funzione $F(X_1 X_2 \dots X_r)$ di r operazioni I variabili $X_1 \dots X_r$ si giunge al concetto d'integrale definito multiplo di $F(X_1 X_2 \dots X_r)$ relativamente a una funzione assegnata $f(y_1)$, calcolata fra certi limiti finiti, rispetto alle operazioni I variabili che in essa figurano. Esso s'ottiene calcolando nel modo anzidetto l'integrale definito di $F(X_1 \dots X_r (f(y_1)$ fra gli assegnati limiti rispetto a ciascuna delle $X_1 \dots X_r$ riguardando ogni volta $F(X_1 \dots X_r)$ come funzione della sola operazione rispetto a cui s'integra e tenendo fisse le altre operazioni. Detti rispettivamente B_1 e $A_1 \dots B_r$ e A_r i limiti d'integrazione per le singole operazioni I variabili: $X_1, \dots X_r$, l'integrale definito multiplo di $F(X_1 \dots X_r) f(y_1)$, rispetto a $X_1 \dots X_r$, quando s'integri prima rispetto X_1, poi rispetto a $X_2 \dots$ e si prosegua con quest'ordine sino ad integrare rispetto a X_r si rappresenterà col simbolo: $\int_{A_r}^{B_r} \dots \int_{A_r}^{B_r} \int_{A_1}^{B_1} F(X_1 \dots X_r) f(y_1)\, dX_1 \dots dX_r$.

Si noti però che mutando l'ordine con cui s'eseguiscono le integrazioni, muta l'integrale al quale si perviene, perchè le operazioni I non sono in generale permutabili.

b) Integrale indefinito. Ripresa in esame l'espressione $\int_A^B F(X) f(y_1) dX$, nella quale si mantenga per i diversi simboli il significato che loro fu dato dianzi, si supponga che l'estremo superiore dell'integrazione sia anzichè una determinazione fissa di X, la stessa operazione I variabile : X. L' espressione che se ne ottiene sarà funzione dell' operazione X (è funzione d' una o più operazioni I variabili anche la funzione che ottienesi applicando l' operazione rappresentata da una data funzione di certe operazione I variabili applicata a una funzione qualsiasi, chè anche una tale espressione assume determinazioni diverse in corrispondenza alle determinazioni diverse che assumono le operazioni variabili contenute in essa) rispetto alla quale si è integrato. Esso si dirà: « integrale indefinito di F(X) relativamente a $f(y_1)$ (o anche integrale indefinito di $F(X)\,f(y_1)$) calcolato rispetto a X » e si designerà col simbolo: $\int F(X)\,f(y_1)\,dX$.

Sull' integrale indefinito testè considerato si hanno i seguenti teoremi:

I. L' integrale $\int F(X)\,f(y_1)\,dX$ è funzione continua dell' operazione I variabile X relativamente alla funzione oggetto $f(y_1)$, nel campo di determinazioni di X, in cui F(X) è continua relativamente a $f(y_1)$.

II. Dall' essere $\Phi(X)\,f(y_1) = \int F(X)\,f(y_1)\,dX$ risulta $\dfrac{d\Phi(X)\,f(y_1)}{dX} = F(X)\,f(y_1)$.

III. L' integrazione (sì definita che indefinita) rispetto ad operazioni I variabili è permutabile all' addizione.

IV. Detta $\Phi(X)$ una seconda funzione dell' operazione I variabile : X e mantenendo per F(X), $f(y_1)$ il significato che loro fu dato per l' addietro, si ha: $\int F(X)\Phi(X)f(y_1)dX = \Phi(X)\int F(X)f(y_1)dX - \int \{\Phi'(X)\int F(X)f(y_1)dX\}dX$.

Se, preso in esame l' integrale definito multiplo:

$$\int_{A_r}^{B_r} \dots \int_{A_1}^{B_1} F(X_1 \dots X_2)\,f(y_1)\,dX_1 \dots dX_r$$

considerato più sopra, si suppone che gli estremi superiori d' integrazione siano, anzichè determinazioni fisse rispettivamente di $X_1 \dots X_r$, queste stesse operazioni I variabili, l' integrale definito in parola diverrà funzione delle operazioni I variabili: $X_1 \dots X_r$. Esso si dirà « integrale indefinito multiplo di $F(X_1 \dots X_r)$ relativamente a $f(y_1)$ (o anche integrale indefinito multiplo di $F(X_1 \dots X_r)\,f(y_1)$ calcolato rispetto a $X_1 \dots X_r$ e si designerà con:

$$\underbrace{\int \dots \int}_{r \text{ volte}} F(X_1 \dots X_r)\,f(y_1)\,dX_1 \dots dX_r\,.$$

Per gli integrali indefiniti quali quello testè considerato, valgono tutti e quattro i teoremi dati dianzi per gli integrali di funzioni d' una sola operazione I variabile. Il I e il III di quei teoremi sussistono inalterati: al II conviene dare, nel caso presente la forma seguente:

Se è $\Phi(X_1 \dots X_r)\, f(y_1) = \underbrace{\int \dots \int}_{r \text{ volte}} F(X_1 \dots X_r)\, f(y_1)\, dX_1 \dots dX_r$ si ha:

$$(i = 1, 2 \dots r)_1 \; \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \underbrace{\int \dots \int}_{r-1 \text{ volte}} F(X_1 \dots X_r)\, f(y_1)\, dX_1 \dots dX_{i-1}\, dX_{i+1} \dots dX_r\,;$$

e parimenti si ha:

$$\frac{\partial^r \Phi}{\partial X_1 \dots \partial X_r} = F(X_1 \dots X_r).$$

Al teorema IV si darà ora un'estensione analoga.

Matematica. — *Sulle equazioni lineari del secondo ordine con integrale generale esplicito*. Nota del prof. O. NICOLETTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni alle derivate parziali che definiscono un gruppo*. Nota del dott. P. MEDOLAGHI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

La equazione dell'ultimo moltiplicatore

$$(1) \qquad \varphi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

ha la proprietà, scoperta da Lie (1883), di ammettere, quando si consideri φ come funzione nota, e $\xi_1 \dots \xi_n$ come funzioni incognite, insieme ai sistemi di soluzioni $\xi_1 \dots \xi_n$, $\eta_1 \dots \eta_n$ anche il sistema $\zeta_1 \dots \zeta_n$, posto

$$\zeta_i = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \right);$$

ciò che si esprime dicendo che la (1) definisce un gruppo.

Si può domandare se vi sono altre equazioni alle derivate parziali che hanno la stessa proprietà; se vi sono cioè altre equazioni che, *per sè sole*, definiscono un gruppo.