ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

razione I variabile. Il I e il III di quei teoremi sussistono inalterati: al II conviene dare, nel caso presente la forma seguente:

Se è $\Phi(X_1 \dots X_r)\, f(y_1) = \underbrace{\int \dots \int}_{r \text{ volte}} F(X_1 \dots X_r)\, f(y_1)\, dX_1 \dots dX_r$ si ha:

$$(i = 1, 2 \dots r),\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \underbrace{\int \dots \int}_{r-1 \text{ volte}} F(X_1 \dots X_r)\, f(y_1)\, dX_1 \dots dX_{i-1}\, dX_{i+1} \dots dX_r\,;$$

e parimenti si ha:

$$\frac{\partial^r \Phi}{\partial X_1 \dots \partial X_r} = F(X_1 \dots X_r).$$

Al teorema IV si darà ora un'estensione analoga.

Matematica. — *Sulle equazioni lineari del secondo ordine con integrale generale esplicito.* Nota del prof. O. Nicoletti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni alle derivate parziali che definiscono un gruppo.* Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio V. Cerruti.

La equazione dell'ultimo moltiplicatore

$$(1) \qquad \varphi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

ha la proprietà, scoperta da Lie (1883), di ammettere, quando si consideri φ come funzione nota, e $\xi_1 \dots \xi_n$ come funzioni incognite, insieme ai sistemi di soluzioni $\xi_1 \dots \xi_n$, $\eta_1 \dots \eta_n$ anche il sistema $\zeta_1 \dots \zeta_n$, posto

$$\zeta_i = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \right);$$

ciò che si esprime dicendo che la (1) definisce un gruppo.

Si può domandare se vi sono altre equazioni alle derivate parziali che hanno la stessa proprietà; se vi sono cioè altre equazioni che, *per sè sole*, definiscono un gruppo.

Per valori speciali di n, a questa domanda è stato già indirettamente risposto:

$n = 1$; ogni gruppo della varietà ad una dimensione ha naturalmente una sola equazione di definizione. Questa poi ha una delle tre forme [1]:

$$\begin{aligned} \xi' &+ \alpha(x)\,\xi = 0 \\ \xi'' &+ \alpha(x)\,\xi' + \alpha'(x)\,\xi = 0 \\ \xi''' &+ 2\,\alpha(x)\,\xi' + \alpha'(x)\,\xi = 0 \end{aligned}$$

$n = 2$; uno sguardo al quadro di tutti i gruppi in due variabili [2], ci mostra che le equazioni:

$$\varphi\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \xi\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \alpha\,\frac{\partial \eta}{\partial y} - \alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \xi\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,.$$

Sono le sole che definiscono, ciascuna per sè, un gruppo [3].

$n = 3$; si incontra a questo punto il solo tipo (1) [4].

La circostanza che, già per $n = 3$, la equazione dell'ultimo moltiplicatore è l'unica equazione alle derivate parziali che definisca per sè sola un gruppo, fa naturalmente supporre che anche per $n > 3$ la equazione (1) sia *l'unica* che abbia la proprietà di definire un gruppo. Una dimostrazione di questo fatto non è stata però fin quì data; mi è sembrato utile farne l'oggetto di una Nota, tanto più che il metodo di cui mi valgo è nuovo, e conduce ad un teorema generale sui sistemi di equazioni di definizione.

Ogni gruppo intransitivo ha almeno una equazione di definizione in cui non entrano le derivate delle ξ: escludo dunque i gruppi intransitivi dalle considerazioni che sto per fare.

Sia un gruppo qualunque (finito od infinito) in uno spazio ad n dimensioni; le equazioni di definizione siano m, e di ordine s [5]. Indico con ε_{kn} il numero delle derivate di ordine k di una funzione di n variabili. Con un

(1) Lie-Engel, *Theorie der Transf. gruppen*, vol. III, cap. I e Math. Ann. Bd. XVI.

(2) Lie-Engel, *Theorie der Transf. gruppen*, vol. III, pei gruppi finiti e Math. Ann. Bd. XVI; Lie, *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft d. W.*, XXXV Band. (1895), per quelli infiniti.

(3) Poichè si parla di equazioni alle derivate parziali per le $\xi\ \eta$, non è il caso di considerare i gruppi $\xi\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$.

(4) Sebbene la determinazione di tutti i gruppi in R_3 sia un problema già risoluto da Lie, non è stato ancora pubblicato un quadro completo dei diversi tipi. Anche i signori Picard e Beudon hanno eseguiti i calcoli necessarî per quella determinazione, ma neppure i loro risultati furono fin qui pubblicati.

(5) Con s indico l'ordine del sistema: ma vi potranno essere eventualmente equazioni di ordine minore.

metodo trovato da Engel [1] si può far corrispondere al gruppo proposto un gruppo in $N_s = n(\varepsilon_{1n} + \varepsilon_{2n} + \cdots + \varepsilon_{sn})$ variabili, e ad $N_s - m$ parametri, contenuto come sottogruppo in un gruppo B_{sn} ad N_s parametri.

Finchè i numeri s, n rimangono gli stessi, il gruppo B_{sn} rimane lo stesso, qualunque sia d'altronde il gruppo in n variabili che si considera. Inversamente, ad ogni sottogruppo $(N_s - m)^{\text{plo}}$ di B_{sn} corrispondono gruppi in n variabili, con m equazioni, di ordine s. In virtù di questa corrispondenza il problema:

trovare le equazioni che per sè sole definiscono un gruppo in R_n, si trasforma in quest'altro:

per ogni valore di s, trovare i sottogruppi di B_{sn} ad $N_s - 1$ parametri.

I gruppi $B_{1n}\, B_{2n} \ldots$, sebbene siano occorsi in altre ricerche [2] (strettamente legate, del resto, alla teoria dei gruppi) non sono stati ancora oggetto di uno studio speciale. Non potendo d'altra parte dimostrarle in questa Nota, mi limiterò ad enunciare quelle loro proprietà che mi sono necessarie:

1. *Il primo derivato del gruppo B_{sn} ha $N_s - 1$ parametri.* Se per le trasformazioni infinitesime di B_{sn} si conservano le notazioni della mia Memoria negli Annali di Mat., si trova che questo gruppo derivato è rappresentato dalle trasformazioni:

$$B_{i\mu}\ \ i, \mu = 1 \ldots n\ \ (i \neq \mu)\,;\ \ B_{ii} - B_{nn}\ \ i = 1 \ldots n-1\,;\ B_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}\ \text{dove}\ \sum_{i=1}^{n} \nu_i > 1.$$

Si indicherà con C_{sn} il derivato di B_{sn} e con U la trasformazione $\sum_{i=1}^{n} B_{ii}$.

2. *Hanno luogo le relazioni*:

$$(U\, B_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i - 1\right) B_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}.$$

3. *Il gruppo C_{sn} coincide col suo derivato* (gruppo *perfetto*).

4. *Le trasformazioni* $B_{i\mu}\ (i \neq \mu)$, $B_{ii} - B_{nn}$ *formano un gruppo isomorfo al gruppo lineare omogeneo speciale dello spazio ad n dimensioni* (quindi un gruppo semplice).

5. *Le trasformazioni* $B_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i > 1\right)$ *formano un sottogruppo invariante in C_{sn} di rango* [3] *zero.*

[1] Math. Ann., Bd. XXVII. Vedi anche un mio lavoro negli Annali di Matematica, 1897.

[2] In quelle p. es. sulla generalizzazione delle funzioni di variabile complessa (Picard, Journal de Mathém., 1892, e C. R., 1891).

[3] Adopero questa parola nel senso attribuitole da Killing nella sua Memoria: *Ueber die Zusammensetzung cont. Gruppen* (Math. Ann. XXXI).

Dalla prop. 3 segue che in B_{sn} non vi è nessun sottogruppo invariante $(N_s - 1)^{plo}$ oltre C_{sn}. Potrebbero tuttavia esservi dei sottogruppi $(N_s - 1)^{pli}$ non invarianti; si vedrà che nemmen questi vi sono.

I gruppi che coincidono con il loro derivato sono di due sorta [1]:

gruppi che si scompongono (zerfallen) in gruppi tali che le trasformazioni dell'uno sono permutabili con quelle di tutti gli altri.

gruppi che si possono rappresentare con un gruppo semplice ed un sottogruppo invariante di rango zero.

Il gruppo C_{sn} appartiene (prop. 4, 5) alla seconda categoria. I suoi sottogruppi massimi si formano per conseguenza [2] nel modo seguente: si determinano i sottogruppi massimi del gruppo semplice, e ad ognuno di questi si aggiunge l'intero gruppo invariante. Nel nostro caso il gruppo semplice essendo isomorfo al gruppo proiettivo generale di uno spazio ad $n - 1$ dimensioni, i suoi sottogruppi massimi hanno $(n-1)n$ parametri, e sono riducibili ad uno dei due tipi seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & B_{nk}\,,\ B_{ik}\,(i \neq k)\,,\ B_{kk} - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} B_{\mu\mu} \\ b) & -B_{kn}\,,\ B_{ik}\,(i \neq k)\,,\ B_{kk} - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} B_{\mu\mu} \end{array}\right\} i, k = 1 \dots n-1$$

I sottogruppi massimi di C_{sn} sono dunque riducibili ai due tipi:

$$\text{A)} \quad B_{nk}\,,\ B_{ik}\,(i \neq k)\,,\ B_{kk} - \frac{1}{n}\sum_{\mu} B_{\mu\mu}\ \ i,k=1\dots n-1;\ B_{i,\nu_1 \dots \nu_n}\ \text{per}\ \sum_{i=1}^{n} \nu_i > 1$$

$$\text{B)} \quad -B_{kn}\,,\ B_{ik}\,(i \neq k)\,,\ B_{kk} - \frac{1}{n}\sum_{\mu} B_{\mu\mu}\ \ i,k=1\dots n-1;\ B_{i,\nu_1 \dots \nu_n}\ \text{per}\ \sum_{i=1}^{n} \nu_i > 1.$$

Aggiungendo a ciascuno di questi due gruppi la trasformazione U, si hanno ancora due gruppi (prop. 2) contenuti in B_{sn} e non in C_{sn} e precisamente due sottogruppi massimi di B_{sn} (quando si faccia astrazione da C_{sn}); questi hanno $N_s - n + 1$ parametri.

Riassumendo: in B_{sn} vi è un sottogruppo invariante $(N_s - 1)^{plo}$ — cioè il gruppo C_{sn} — e dopo questo i sottogruppi col massimo numero di parametri ne hanno $N_s + 1 - n$.

Al gruppo C_{sn} corrispondono nello spazio ad n dimensioni i gruppi rappresentati da (1). Dopo di questi, i gruppi in R_n col minimo numero di equazioni di definizione ne hanno $N_s - (N_s - n + 1) = n - 1$.

Si vede che soltanto per $n = 2$ si avranno ancora dei gruppi con una sola equazione di definizione. Dunque:

(1) Killing, *Zusammensetzung der cont. Gruppen* (Math. Ann., XXXIV).

(2) Killing, *Grösster Untergruppen endl. Transf. Gruppen* (Math. Ann. XXXVI).

1. *La equazione dell'ultimo moltiplicatore è l'unica equazione che, da sè sola, definisca un gruppo* (per $n > 2$).

2. *Ogni gruppo in uno spazio ad n dimensioni ha almeno* $n - 1$ *equazioni di definizione; o ne ha una sola ed è uno dei gruppi* (1).

A questo teorema si può dare una forma un po' diversa:

Se un gruppo ha k ($k > 1$) *equazioni di definizione, esso non può esistere che in un* R_{k+1}, *od in uno spazio ad un numero minore di dimensioni.*

Pei gruppi intransitivi sarebbe facile, con lo stesso metodo, vedere come i teoremi precedenti devono essere modificati.

Fisica. — *Sul numero di trasporto del cloro dell' acido cloridrico in solventi diversi.* Nota del prof. Carlo Cattaneo, [1] presentata dal Corrispondente Naccari [2].

Nell' anno decorso [3], in relazione colle mie antecedenti ricerche sulla conducibilità elettrica dei sali in varî solventi [4], mi sono occupato della determinazione diretta del numero di trasporto del cloro pel cloruro di sodio e pel cloruro di ammonio in soluzioni acquose e gliceriche; fino da allora avevo fatto rilevare le grandi difficoltà sperimentali che si incontrano in tal genere di ricerche, ed inoltre la considerazione dei risultati numerici a cui ero pervenuto, mi aveva fatto sospettare che l' influenza del solvente sul numero di trasporto degli joni e sul rapporto delle loro velocità fosse così piccola da rimanere in parte coperta dagli inevitabili errori di osservazione e di esperienza. Allo scopo di raccogliere altri dati sull' argomento così importante per la teoria della dissociazione elettrolitica, e constatare qual grado di attendibilità potevasi dare alle conclusioni a cui ero pervenuto collo studio dei due sali sopra accennati, mi sono occupato dal novembre ad oggi della determinazione diretta del numero di trasporto del cloro dell' acido cloridrico, col quale si ha il vantaggio di poter adoperare parecchi solventi (certo in maggior numero di quelli che si presterebbero per i sali), vantaggio che compensa almeno le aumentate difficoltà sperimentali.

Costarono lungo tempo le prove preliminari per decidere la scelta dell' anodo da adoperarsi nell' apparecchio di elettrolisi; esso doveva soddisfare insieme alla condizione di non essere attaccato direttamente dall' acido cloridrico, indipendentemente dal passaggio della corrente, ed a quella di for-

[1] Presentata nella seduta del 4 aprile 1897.

[2] Lavoro eseguito nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto Tecnico di Torino.

[3] Rend. Acc. Lincei, 2° semestre, fasc. 6°, 1896.

[4] R. Accad. scienze di Torino, aprile 1893; R. Accad. Lincei, Agosto 1893; Idem, 1895; Idem, 1896.