ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Anche i gruppi di macchie presentano una maggiore frequenza nelle zone australi, ove trovansi anche nella zona (— 20 — 30), mentre al nord si arrestano in quella di (+ 10° + 20°). Il massimo per zona avvenne pure al sud dell' equatore, come nel trimestre precedente e la grande macchia del Gennaio stava pure nell' emisfero australe.

Matematica. — *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante wronskiano.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

È nota la proprietà del determinante wronskiano di un sistema di n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ di una variabile x. Indicato con W questo determinante e con D la derivazione rispetto ad x, in guisa che

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \ldots\ldots & \varphi_n \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 \ldots\ldots & D\varphi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{n-1}(\varphi_1) & D^{n-1}(\varphi_2) \ldots & D^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix},$$

la condizione necessaria e sufficiente affinchè le n funzioni siano linearmente dipendenti, cioè legate da una relazione della forma

$$(a) \qquad a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n = 0\,,$$

dove le $a_1, a_2, \ldots a_n$ sono costanti, è espressa dall' essere W identicamente nullo.

Sono state date due estensioni di questa proprietà, nelle quali in luogo del determinante W se ne considera uno in cui all' operazione D è sostituita un' altra operazione distributiva. La prima vi sostituisce l' operazione di differenza finita: posto

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)\,,$$

l' annullarsi identico del determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \ldots\ldots & \varphi_n \\ \Delta\varphi_1 & \Delta\varphi_2 \ldots\ldots & \Delta\varphi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1}(\varphi_1) & \Delta^{n-1}(\varphi_2) \ldots & \Delta^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè fra le n funzioni $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ passi una relazione della forma (a) ma in cui i coefficienti $a_1 \ldots a_n$ sono funzioni periodiche di x col periodo 1 [1]. La seconda estensione è stata data dal sig. Grévy [2], ed ecco, con qualche modificazione nelle notazioni, in che consiste. Sia $\mu(x)$ una funzione data, $S\varphi$ l'operazione che consiste nel sostituire, in $\varphi(x)$, alla variabile x la funzione data $\mu(x)$; onde la definizione immediata di $S^2, \dots S^n$. L'essere il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \dots\dots\dots & \varphi_n \\ S\varphi_1 & S\varphi_2 \dots\dots\dots & S\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ S^{n-1}(\varphi_1) & S^{n-1}(\varphi_2) \dots & S^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}$$

identicamente nullo esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè fra le n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ passi una relazione della forma (a) in cui i coefficienti a_i sono funzioni che rimangono invariate colla operazione S [3].

Si presenta quindi naturale la ricerca di quelle operazioni distributive A tali che l'annullarsi del determinante

$$(b) \qquad V = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \dots\dots\dots & \varphi_n \\ A\varphi_1 & A\varphi_2 \dots\dots\dots & A\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{n-1}(\varphi_1) & A^{n-1}(\varphi_2) \dots & A^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}$$

implichi, come nei casi ora ricordati, una relazione semplice fra le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$; questa ricerca forma l'oggetto della presente Nota.

Analizzando le dimostrazioni che si sono date dei tre teoremi che abbiamo citati, si vede facilmente che esse si fondano sostanzialmente sulla espressione che si può dare delle operazioni che vi figurano (D, Δ ed S) quando queste operazioni si applicano ad un prodotto di due funzioni: in altri termini, quelle dimostrazioni si appoggiano al teorema di moltiplicazione verificato rispettivamente dalle operazioni, D, Δ ed S. Siamo condotti da ciò a ricercare quali operazioni ammettono un teorema di moltiplicazione analogo a quello soddisfatto dalle suddette operazioni e si trova senza difficoltà che esso non si presenta che per operazioni formate in modo semplice colle operazioni D ed S (§ 2). Per tali operazioni poi, l'annullarsi del determinante (b) esprime la condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi di una relazione lineare

(1) Casorati, *Il calcolo delle differenze finite interpretato* ecc. § 7. Annali di Matematica, serie II, tomo X.

(2) *Étude sur les équations fonctionnelles*. Ch. VI. Ann. de l'Éc. Normale, III^e série, tome XI.

(3) Il sig. Grévy dice (ciò che torna evidentemente lo stesso) che le a_i sono funzioni periodiche di periodo 1 di una funzione $b(x)$ tale che $Sb(x) = b(x) + 1$.

a coefficienti di forma speciale fra le funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$, ed il teorema così ottenuto contiene come casi particolari quello sul wronskiano, quello di Casorati e quello di Grévy (§§ 3-4).

1. Indichiamo, in ciò che segue, colle lettere minuscole dell'alfabeto greco le funzioni analitiche e con A un'operazione a determinazione unica che, applicata ad una funzione analitica, dia come risultato una funzione analitica, e che goda della proprietà distributiva:

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$$

(operazione funzionale distributiva); inoltre l'operazione A, essendo a determinazione unica, ne segue

$$A(0) = 0 .$$

Supponiamo inoltre che l'operazione A verifichi un teorema di moltiplicazione, espresso dalla formula

$$A(\varphi\psi) = \alpha A(\varphi)\, A(\psi) + \beta(\varphi A(\psi) + \psi A(\alpha)) + \gamma\varphi\psi , \tag{1}$$

φ e ψ essendo due funzioni arbitrarie. Si vuole cercare a quali classi possa appartenere l'operazione A.

2. Si faccia, nella (1), $\psi = 1$ e si ponga $A(1) = \xi$: viene

$$A(\varphi) = (\alpha\xi + \beta)\, A(\varphi) + (\beta\xi + \gamma)\varphi ;$$

se ora l'operazione A non deve essere una semplice operazione di moltiplicazione — un'operazione cioè che consista nel moltiplicare una funzione arbitraria per una funzione fissa [1] — il che escludiamo, dovrà essere

$$\begin{cases} \beta\xi + \gamma = 0 , \\ \alpha\xi + \beta = 1 . \end{cases} \tag{2}$$

Da queste, risulta fra i coefficienti α, β, γ della (1) la relazione

$$\beta(\beta - 1) = \alpha\gamma . \tag{3}$$

Distinguiamo ora due casi, secondo che α è uguale a zero o diverso da zero.

I. Se è $\alpha = 0$, viene $\beta = 1$, onde la (1) diviene:

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + \gamma\varphi\psi .$$

[1] Per l'operazione di moltiplicazione, ogni determinante (b) è identicamente nullo.

Si faccia $\psi = x$, e si ponga

$$A(x) + \gamma x = \eta ;$$

viene

$$A(x\varphi) - xA(\varphi) = \eta\varphi ,$$

onde si conclude [1] che A è una forma differenziale lineare di prim' ordine, vale a dire

$$A(\varphi) = \eta D\varphi + \xi\varphi ,$$

ed essendo, per la prima delle (2), $\xi = -\gamma$, viene precisamente

$$A(\varphi) = \eta D\varphi - \gamma\varphi . \tag{4}$$

II. Sia ora $\alpha \neq 0$. La (1) si può scrivere

$$\alpha A(\varphi\psi) = (\alpha A(\varphi) + \beta\varphi)(\alpha A(\psi) + \beta\psi) + (\alpha\gamma - \beta^2)\varphi\psi ,$$

ma per la (3)

$$\alpha\gamma - \beta^2 = -\beta ,$$

onde, posto

$$\alpha A(\varphi) + \beta\varphi = B(\varphi) \tag{5}$$

la relazione di moltiplicazione (1) prende la forma

$$B(\varphi\psi) = B(\varphi)\, B(\psi) ,$$

cioè l' operazione B è distributiva, oltrecchè rispetto all' addizione, anche rispetto alla moltiplicazione. Essa non differisce dunque [2] da un' operazione S di sostituzione, onde si conclude dalla (5):

$$A(\varphi) = \frac{1}{\alpha} S(\varphi) - \frac{\beta}{\alpha}\varphi . \tag{6}$$

Le (4) e (6) dànno così la forma generale delle operazioni distributive che ammettono un teorema di moltiplicazione della forma (1).

3. Dico ora che l' annullarsi del determinante V (formula (b)) quando l' operazione A soddisfa ad un teorema di moltiplicazione (1), è condizione necessaria e sufficiente perchè fra le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, passi una relazione lineare omogenea

$$\pi_1\varphi_1 + \pi_2\varphi_2 + \cdots + \pi_n\varphi_n = 0 , \tag{7}$$

[1] V. la mia Nota: *Sulle operazioni funzionali distributive* (§ 9, c). Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, tomo IV, 1895.

[2] V. la Nota citata: *Sulle operazioni funzionali distributive*, § 9, e.

dove $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$ sono soluzioni di una medesima equazione funzionale della forma

$$A(\pi) = \lambda\pi. \tag{8}$$

I. La condizione è necessaria. Infatti, applicando ad ambo i membri della (7) l'operazione A, tenendo conto della formula (1) e della relazione (8) cui soddisfano le π_i, otteniamo

$$(\alpha\lambda + \beta) \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, A(\varphi_i) + (\beta\lambda + \gamma) \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, \varphi_i = 0,$$

onde

$$(\alpha\lambda + \beta) \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, A(\varphi_i) = 0.$$

Ma $\alpha\lambda + \beta$ non può essere nullo, nè nel caso di $\alpha = 0$, nè in quello di $\alpha \neq 0$: in questo ultimo caso infatti, essendo A data dalla (6), ne risulterebbe, per essere

$$\lambda = -\frac{\beta}{\alpha},$$

che la (8) si ridurrebbe a

$$\frac{1}{\alpha} S(\pi) = 0,$$

equazione che non ammette altra soluzione fuori di $\pi = 0$. Onde si conclude

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, A(\varphi_i) = 0,$$

ed analogamente

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, A^2(\varphi_i) = 0, \;\dots\dots\; \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, A^{n-1}(\varphi_i) = 0,$$

onde eliminando $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n$, si ottiene $V = 0$, c. d. d.

II. La condizione è sufficiente. Infatti se V è uguale a zero, esistono n funzioni $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ tali che sia

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_n\varphi_n = 0, \\ \varrho_1 A(\varphi_1) + \varrho_2 A(\varphi_2) + \cdots + \varrho_n A(\varphi_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varrho_1 A^{n-1}(\varphi_1) + \varrho_2 A^{n-1}(\varphi_2) + \cdots + \varrho_n A^{n-1}(\varphi_n) = 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

Si eseguisca l'operazione A sui due membri delle prime $n-1$ delle equazioni (9) e si otterrà, per la (1):

$$\sum_{i=1}^{n} \{(\alpha A(\varrho_i) + \beta\varrho_i)\, A^{r+1}(\varphi_i) + (\beta A(\varrho_i) + \gamma\varrho_i)\, A^r(\varphi_i)\} = 0,$$
$$(r = 0, 1, 2, \dots n-2)$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} A(\varrho_i)\,(\alpha\, A^{r+1}(\varphi_i) + \beta\, A^r(\varphi_i)) = 0\,.$$

Ma moltiplicando una delle (9) per α, la precedente per β e sommando, si ottiene il sistema

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho_i\,(\alpha\, A^{r+1}(\varphi_i) + \beta\, A^r(\varphi_i)) = 0\,,$$
$$(r = 0\,,1\,,2\,,\dots n-2)$$

onde si conclude che le ϱ_i e le $A(\varrho_i)$, date dal medesimo sistema di $n-1$ equazioni lineari omogenee, sono proporzionali. Si ha dunque

$$\frac{A(\varrho_1)}{\varrho_1} = \frac{A(\varrho_2)}{\varrho_2} = \dots = \frac{A(\varrho_n)}{\varrho_n} = \lambda\,,$$

il che dimostra il teorema.

4. Ricordiamo ora (§ 2) che le due classi di operazioni che ammettono un teorema di moltiplicazione della forma (1) sono le

$$\eta\, D\varphi - \gamma\varphi\;,\;\; \frac{1}{\alpha}\, S\varphi - \frac{\beta}{\alpha}\,\varphi\,.$$

Per le prime, l'equazione funzionale (8) diviene

$$\eta\, D\varphi = (\gamma + \lambda)\,\varphi\,,$$

le cui soluzioni non possono differire se non per un moltiplicatore costante; per le seconde l'equazione (8) dà:

$$S(\varphi) = (\beta + \alpha\lambda)\,\varphi\,,$$

ed il rapporto di due soluzioni di questa equazione è una funzione ω tale che

$$S(\omega) = \omega\,,$$

cioè una funzione invariante rispetto all'operazione S.

Riassumendo, abbiamo trovato che:

« Indicando con D l'operazione di derivazione e con S quella di sosti- « tuzione, le espressioni

$$\mu\, D\varphi + \nu\varphi\;,\;\; \mu\, S\varphi + \nu\varphi\,,$$

« danno tutte e sole le operazioni funzionali A che ammettono un teorema « di moltiplicazione della forma (1). E date n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, l'an- « nullarsi identico del determinante

$$V = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \dots\dots\dots\dots & \varphi_n \\ A(\varphi_1) & A(\varphi_2) \dots\dots\dots & A(\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{n-1}(\varphi_1) & A^{n-1}(\varphi_2) \dots\dots & A^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}$$

« esprime, nel caso delle operazioni $\mu D + \nu$, la condizione necessaria e suffi- « ciente affinchè fra le n funzioni φ_i passi una relazione lineare omogenea « a coefficienti costanti, e nel caso delle operazioni $\mu S + \nu$ la condizione « necessaria e sufficiente affinchè fra le stesse funzioni passi una relazione « lineare omogenea a coefficienti invarianti rispetto all' operazione S ».

5. Diremo che una operazione distributiva A ammette un periodo ω, quando esiste una funzione ω tale che, qualunque sia la funzione φ, si abbia

$$A(\omega\varphi) = \omega A(\varphi).$$

Per le operazioni della forma (4), ogni costante è un periodo, e si vede immediatamente che non vi possono essere periodi che non siano costanti, poichè da

$$\eta D(\omega\varphi) - \gamma\omega\varphi = \omega(\eta D\varphi - \gamma\varphi),$$

risulta $D\omega = 0$. Per le operazioni della forma (6) ogni funzione lasciata invariata da S è un periodo e si vede chiaramente che non ve ne possono essere altri. Talchè il teorema del paragrafo precedente si può enunciare più concisamente nei seguenti termini:

« Per le operazioni A che ammettono un teorema di moltiplicazione « della forma (1), l' annullarsi identico del determinante V esprime la con- « dizione necessaria e sufficiente affinchè fra le n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ passi « una relazione lineare omogenea a coefficienti periodici in A ».

Matematica. — *Sulle equazioni lineari del secondo ordine del tipo iperbolico, la cui serie di Laplace è finita in ambedue i sensi.* Nota del prof. O. Niccoletti, presentata dal Socio V. Cerruti [1].

In una Nota, inserita nei Rendiconti di questa R. Accademia [2], sulla teoria delle trasformazioni differenziali ed integrali delle equazioni lineari

[1] Presentata nella seduta del 25 aprile 1897.

[2] Niccoletti, *Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee del 2° ordine con due variabili indipendenti* (Rendiconti Lincei, 2 agosto 1896). In seguito indicheremo questa Nota colla lettera N. I teoremi ivi enunciati sono dimostrati in una mia Memoria, collo stesso titolo, ora in pubblicazione negli Annali della S. N. Sup. di Pisa.