ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

« danno tutte e sole le operazioni funzionali A che ammettono un teorema « di moltiplicazione della forma (1). E date n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, l'an- « nullarsi identico del determinante

$$V = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots\dots & \varphi_n \\ A(\varphi_1) & A(\varphi_2) & \dots\dots & A(\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{n-1}(\varphi_1) & A^{n-1}(\varphi_2) & \dots & A^{n-1}(\varphi_n) \end{vmatrix}$$

« esprime, nel caso delle operazioni $\mu D + \nu$, la condizione necessaria e suffi- « ciente affinchè fra le n funzioni φ_i passi una relazione lineare omogenea « a coefficienti costanti, e nel caso delle operazioni $\mu S + \nu$ la condizione « necessaria e sufficiente affinchè fra le stesse funzioni passi una relazione « lineare omogenea a coefficienti invarianti rispetto all'operazione S ».

5. Diremo che una operazione distributiva A ammette un periodo ω, quando esiste una funzione ω tale che, qualunque sia la funzione φ, si abbia

$$A(\omega\varphi) = \omega A(\varphi).$$

Per le operazioni della forma (4), ogni costante è un periodo, e si vede immediatamente che non vi possono essere periodi che non siano costanti, poichè da

$$\eta D(\omega\varphi) - \gamma\omega\varphi = \omega(\eta D\varphi - \gamma\varphi),$$

risulta $D\omega = 0$. Per le operazioni della forma (6) ogni funzione lasciata invariata da S è un periodo e si vede chiaramente che non ve ne possono essere altri. Talchè il teorema del paragrafo precedente si può enunciare più concisamente nei seguenti termini:

« Per le operazioni A che ammettono un teorema di moltiplicazione « della forma (1), l'annullarsi identico del determinante V esprime la con- « dizione necessaria e sufficiente affinchè fra le n funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ passi « una relazione lineare omogenea a coefficienti periodici in A ».

Matematica. — *Sulle equazioni lineari del secondo ordine del tipo iperbolico, la cui serie di Laplace è finita in ambedue i sensi.* Nota del prof. O. Niccoletti, presentata dal Socio V. Cerruti [1].

In una Nota, inserita nei Rendiconti di questa R. Accademia [2], sulla teoria delle trasformazioni differenziali ed integrali delle equazioni lineari

[1] Presentata nella seduta del 25 aprile 1897.

[2] Niccoletti, *Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee del 2° ordine con due variabili indipendenti* (Rendiconti Lincei, 2 agosto 1896). In seguito indicheremo questa Nota colla lettera N. I teoremi ivi enunciati sono dimostrati in una mia Memoria, collo stesso titolo, ora in pubblicazione negli Annali della S. N. Sup. di Pisa.

omogenee del secondo ordine con due variabili indipendenti, ho enunciato il risultato che l'illimitata applicazione all'equazione elementare:

$$s = 0$$

delle trasformazioni integrali singolari del 1° ordine (in quella Nota indicate con σ e τ) dà un mezzo per costruire *tutte* le equazioni lineari del secondo ordine, il cui integral generale contiene in modo esplicito le due funzioni arbitrarie. Mi propongo in quel che segue, di dare la dimostrazione di questo teorema.

1. Rammentiamo alcuni risultati relativi alle trasformazioni integrali singolari del 1° ordine delle equazioni del tipo iperbolico.

Data una tale equazione:

$$\Omega(z) = s + ap + bq + cz = 0 \ , \tag{1}$$

indicandone con z l'integral generale, con u_0 una soluzione particolare dell'equazione aggiunta $\Phi(u) = 0$, le due trasformate integrali singolari corrispondenti alla soluzione u_0, sono:

$$\text{(2)}\ \sigma = \int u_0\, \Omega_2(z)\, dx + z\Phi_1(u_0)\, dy = \int u_0(p + bz)\, dx + z\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - au_0\right) dy\text{(1)}$$

$$\text{(3)}\ \tau = \int z\Phi_2(u_0)\, dx + u_0\, \Omega_1(z)\, dy = \int z\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - bu_0\right) dx + u_0(q + az)\, dy\ ;$$

e soddisfano (rispettivamente) per ogni valore di z alle equazioni:

$$\Gamma(\sigma) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} - \frac{1}{u_0}\Phi_1(u_0)\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{k(u_0)}{\Phi_1(u_0)}\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0; \tag{2*}$$

$$\Pi(\tau) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} - \frac{hu_0}{\Phi_1(u_0)}\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{1}{u_0}\Phi_2(u_0)\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \tag{3*}$$

(essendo h e k gli invarianti, secondo Darboux, dell'equazione (1)) e ne sono gli integrali generali.

Dalle formule (2) e (3) risulta derivando:

$$z = \frac{1}{\Phi_1(u_0)}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\ ; \quad z = \frac{1}{\Phi_2(u_0)}\frac{\partial \tau}{\partial x} \tag{4}$$

cioè:

(1) Cf. N. formule (13) e (14). Vi è in queste un errore d'impressione; vanno dunque corrette come sopra sono scritte.

Le trasformazioni inverse delle due trasformazioni integrali singolari sono le due trasformazioni del Lewy, corrispondenti alle due soluzioni particolari $\sigma = 1$, $\tau = 1$ *delle equazioni* (2*) *e* (3*) (1).

Inoltre, indicando con h_σ, k_σ; h_τ, k_τ gli invarianti della (2*) e della (3*) si ha:

$$\begin{cases} h_\sigma = \dfrac{1}{u_0^2}\,\Phi_1(u_0)\,\Phi_2(u_0)\,; \quad k_\sigma = \dfrac{k u_0}{\Phi_1(u_0)}\left\{\dfrac{\partial \log \Phi_1(u_0)}{\partial y} - a - \dfrac{\partial \log k}{\partial y}\right\}; \\ h_\tau = \dfrac{h u_0}{\Phi_2(u_0)}\left\{\dfrac{\partial \log \Phi_2(u_0)}{\partial x} - b\,\dfrac{\partial \log h}{\partial x}\right\}; \quad k_\tau = \dfrac{1}{u_0^2}\,\Phi_1(u_0)\,\Phi_2(u_0)\,. \end{cases}$$

Segue di qui una conseguenza importante. Indichiamo infatti con $M(\eta) = 0$ l' equazione aggiunta della (2*), con η il suo integral generale, con $M_1(\eta)$, $M_2(\eta)$, $\Gamma_1(\sigma)$, $\Gamma_2(\sigma)$ le rispettive componenti del 1° ordine. Ricordando allora che la (2*) ammette la soluzione particolare $\sigma = 1$, avremo, applicando la stessa trasformazione che dalla z fa passare alla σ, che la funzione:

$$\psi = \int M_2(\eta)\,dx + \eta\,\Gamma_1(1)\,dy$$

è l' integral generale della equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} - \Gamma_1(1)\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{k_\eta}{\Gamma_1(1)}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,;$$

ossia, poichè:

$$\Gamma_1(1) = -\frac{1}{u_0}\,\Phi_1(u_0)\,, \quad k_\eta = h_\sigma\,,$$

dell' equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial \log u_0}{\partial y} - a\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log u_0}{\partial x} - b\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,;$$

il che dimostra che la funzione:

$$u = u_0\,\psi$$

è l' integral generale della $\Phi(u) = 0$. Abbiamo cioè il teorema:

Eseguendo sulla equazione aggiunta della (2*) (*o della* (3*)) *la medesima trasformazione che porta dalla* z *alla* σ *(oppure alla* τ*), colla soluzione particolare* $\sigma = 1$ (*o* $\tau = 1$), *si ottiene un' equazione equivalente alla* $\Phi(u) = 0$, *aggiunta della data.*

Indicando poi con ζ l' integral generale della equazione aggiunta alla (3), dalle formule superiori segue anche:

$$\eta = \frac{-u_0}{\Phi_1(u_0)}\,\frac{\partial \dfrac{u}{u_0}}{\partial y}\,; \quad \zeta = \frac{-u}{\Phi_2(u_0)}\,\frac{\partial \dfrac{u}{u_0}}{\partial x}\,, \tag{5}$$

(1) Cf. N., n. 2.

dalle quali si ha senz'altro il teorema:

Gli integrali generali delle equazioni aggiunte della ($2^\star$) *e della* ($3^\star$) *si ottengono da quello della equazione aggiunta della* (1) *(rispettivamente) colle due trasformazioni del Lewy corrispondenti alla soluzione particolare u_0 che ha servito alla trasformazione.*

Osserviamo infine che se l'equazione (1) è integrabile col metodo di Laplace e più precisamente, secondochè la serie di Laplace relativa alla (1) è finita in un solo senso, oppure in tutti due i sensi delle variabili x ed y, altrettanto accade di ogni sua trasformata differenziale ed integrale. Questo è evidente per le trasformazioni differenziali: per le integrali risulta immediatamente da un teorema di Darboux [1].

2. Andiamo ora a costruire tutte le equazioni lineari del secondo ordine che hanno un integrale generale esplicito nelle due funzioni arbitrarie. Esse ci saranno date dalla applicazione ripetuta delle trasformazioni singolari σ e τ.

Supponiamo infatti che la serie di Laplace relativa alla equazione (1) sia finita in ambo i sensi e quindi il suo integral generale abbia la forma:

$$z = AX + A_1X' + \cdots + A_{h-1}X^{(h-1)} + BY + B_1Y' + \cdots + B_{k-1}Y^{(k-1)}, \tag{6}$$

(essendo X una funzione arbitraria della sola x, Y della sola y): sia, cioè, di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y [2]. Ponendo allora:

$$\tag{7} \begin{cases} f_1(t) = At + A_1 \dfrac{\partial t}{\partial x} + \cdots + A_{h-1} \dfrac{\partial^{h-1} t}{\partial x^{h-1}} \\ f_2(t) = Bt + B_1 \dfrac{\partial t}{\partial y} + \cdots + B_{k-1} \dfrac{\partial^{k-1} t}{\partial y^{k-1}}, \end{cases}$$

sarà:

$$z = f_1(X) + f_2(Y). \tag{6*}$$

L'integral generale u della equazione aggiunta sarà allora di rango k rispetto ad x, h rispetto ad y [3]; avrà dunque la forma:

$$u = \alpha X + \alpha_1 X' + \cdots + \alpha_{k-1} X^{(k-1)} + \beta Y + \beta_1 Y' + \cdots + \beta_{h-1} Y^{(h-1)} = h_1(X) + h_1(Y) \tag{8}$$

dove:

$$\tag{9} \begin{cases} h_1(t) = \alpha t + \alpha_1 \dfrac{\partial t}{\partial x} + \cdots + \alpha_{k-1} \dfrac{\partial^{k-1} t}{\partial x^{k-1}} \\ h_2(t) = \beta t + \beta_1 \dfrac{\partial t}{\partial y} + \cdots + \beta_{h-1} \dfrac{\partial^{h-1} t}{\partial y^{h-1}}. \end{cases}$$

(1) Cf. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. II, pag. 151.
(2) Cf. Darboux, l. c., pag. 36.
(3) Id., l. c., pag. 96.

Indichiamo inoltre con $g_1(t), g_2(t)$ i *polinomî aggiunti* di $f_1(t), f_2(t)$; per i quali si hanno dunque le identità:

$$\left\{\begin{aligned} v f_1(t) - t g_1(v) &= \frac{\partial}{\partial x} B_1(t, v) \\ v f_2(t) - t g_2(v) &= \frac{\partial}{\partial y} B_2(t, v) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

essendo B_1, B_2 forme bilineari in t, v e nelle loro derivate fino a quelle degli ordini $h-2, k-2$ rispettivamente [1].

Ciò posto, sia ω una soluzione particolare della $\Phi(u) = 0$, data dalla (8) per $X = X_1$, $Y = Y_1$: e poniamo:

$$z' = f_1(X) \ ; \quad z'' = f_2(Y) \ ; \quad \omega' = h_1(X_1) \ ; \quad \omega'' = h_2(Y_1)$$

e quindi:

$$z = z' + z'' \ ; \quad \omega = \omega' + \omega'' .$$

Dalla formula (2) avremo allora, facendosi $u_0 = \omega$, che la funzione:

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

dove:

$$\sigma' = \int \omega\, \Omega_2(z')\, dx + z' \Phi_1(\omega)\, dy = \omega z' - \int z' \Phi_2(\omega)\, dx + \omega \Omega_1(z')\, dy ,$$

$$\sigma'' = \int \omega\, \Omega_2(z'')\, dx + z'' \Phi_1(\omega)\, dy ,$$

è l'integral generale di un'equazione del secondo ordine, che si ha dalla (2*) facendosi $u_0 = \omega$. Ma dalla prima delle (10), facendovi:

$$v = \Phi_2(\omega) \ ; \quad t = X \ ;$$

abbiamo:

$$z' \Phi_2(\omega) = X g_1(\Phi_2(\omega)) + \frac{\partial}{\partial x} B_1(X, \Phi_2(\omega)),$$

e quindi anche, sostituendo in σ' ed eseguendo parzialmente l'integrazione:

$$\sigma' = \omega z' - B_1(X, \Phi_2(\omega)) - \int X g_1(\Phi_2(\omega))\, dx + \left\{\omega \Omega_1(z') - \frac{\partial}{\partial y} B_1(X, \Phi_2(\omega))\right\} dy .$$

Ne segue [2]:

$$\omega \Omega_1(z') - \frac{\partial}{\partial y} B_1(X, \Phi_2(\omega)) = 0 ,$$

(1) L. c., pag. 99.
(2) Darboux, l. c., pag. 154.

$g_1(\Phi_2(\omega''))=0$; $g_1(\Phi_2(\omega))=g_1(\Phi_2(\omega'))=\varphi_1(X_1)=$ funzione della sola x;
e quindi:

$$\sigma'=\omega z'-B_1(X,\Phi_2(\omega))-\int X\varphi_1(X_1)\,dx\,.$$

Affatto analogamente, ponendo nella seconda delle (10):

$$v=\Phi_1(\omega)\ ;\quad t=Y\,,$$

abbiamo:

$$z''\Phi_1(\omega)=Yg_2(\Phi_1(\omega))+\frac{\partial}{\partial y}B_2(Y,\Phi_1(\omega));$$

e quindi:

$$\sigma''=B_2(Y,\Phi_1(\omega))+\int\left\{\omega\Omega_2(z'')-\frac{\partial}{\partial x}B_2(Y,\Phi_1(\omega))\right\}dx+Yg_2(\Phi_1(\omega))\,dx\,;$$

donde deduciamo di nuovo [1]:

$$\omega\Omega_2(z'')-\frac{\partial}{\partial x}B_2(Y,\Phi_1(\omega))=0;$$

$g_2(\Phi_1(\omega'))=0$; $g_2(\Phi_1(\omega))=g_2(\Phi_1(\omega''))=\varphi_2(Y_1)=$ funzione della sola y;
e quindi:

$$\sigma''=B_2(Y,\Phi_1(\omega)+\int Y\varphi_2(Y_1)\,dy\,;$$

donde finalmente:

$$(11)\quad \sigma=\omega f_1(X)-B_1(X,\Phi_2(\omega))+B_2(Y,\Phi_1(\omega))-\int X\varphi_1(X_1)dx+\int Y\varphi_2(Y_1)dy\,.$$

Da questa espressione di σ segue che, quando le due funzioni X_1 ed Y_1 non siano tali da annullare $\varphi_1(X_1)$, $\varphi_2(Y_1)$, si può avere σ libero da ogni segno di quadratura, sostituendo alle due funzioni arbitrarie X ed Y le nuove funzioni arbitrarie: $\dfrac{X'}{\varphi_1(X_1)}$; $\dfrac{Y'}{\varphi_2(Y_1)}$. Si ha così:

$$(11^*)\ \sigma=\omega f_1\left(\frac{X'}{\varphi_1(X_1)}\right)-B_1\left(\frac{X'}{\varphi_1(X_1)}\,,\ \Phi_2(\omega)\right)+B_2\left(\frac{Y'}{\varphi_2(Y_1)},\,\Phi_1(\omega)\right)-X+Y;$$

si ha cioè per σ un'espressione di rango $h+1$ rispetto ad x, k rispetto ad y [2].

[1] Cf. Darboux, l. c., pag. 154.

[2] Veramente la (11*) e la (12) dimostrano che σ è *al più* di rango $h+1$ rispetto ad x, k rispetto ad y e τ di rango h rispetto ad x, $k+1$ rispetto ad y al più: ma si noti che la z, essendo di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y, si annulla (cf. Darboux, l. c., pag. 48-52) per $h+k-1$ coppie di funzioni:

$$(x_i\,y_i)\quad i=1,2\ldots h+k-1$$

linearmente indipendenti. Di qui è chiaro (Darboux, l. c., pag. 158) che la σ e la τ si annullano per le coppie:

$$\left(\int x_i\,\varphi_1(X_1)\,dx\quad,\ \int y_i\,\varphi_2(Y_1)\,dy\right)$$

e per l'altra (1, 1). Ne segue che la somma dei loro ranghi è uguale ad $h+k-1$ e quindi effettivamente σ è di rango $h+1$ rispetto ad x, k rispetto ad y, τ di rango h e $k+1$.

Affatto analogamente dalla (3) deduciamo, facendovi $u_0 = \omega$, sempre nell'ipotesi di $\varphi_1(X_1) \neq 0$, $\varphi_2(Y_1) \neq 0$:

$$(12)\ \tau = \omega f_2\left(\frac{Y'}{\varphi_2(Y_1)}\right) + B_1\left(\frac{X'}{\varphi_1(X_1)}, \Phi_2(\omega)\right) - B_2\left(\frac{Y'}{\varphi_2(Y_1)}, \Phi_1(\omega)\right) + X - Y;$$

si ha cioè per τ un'espressione di rango h rispetto ad x, $k+1$ rispetto ad y [1].

Noi diremo che un'equazione di Laplace è di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y, quando tale è il rango del suo integral generale. Abbiamo allora il teorema:

La trasformazione singolare σ (o τ), definita dalla formula (2) (*o* (3)), *conduce in generale da equazioni di rango finito rispetto ad x e ad y, ad equazioni, il cui rango rispetto ad y (o ad x) rimane invariato, quello rispetto ad x (o ad y) aumenta invece di una unità.*

3. Consideriamo ora il caso escluso, nel quale una o tutte due le espressioni $\varphi_1(X_1)$, $\varphi_2(Y_1)$ siano uguali allo zero. L'esistenza di tali funzioni X_1, Y_1 risulta subito dalla ripetizione di un ragionamento di Darboux [2]; essa è dunque fuori di dubbio.

Supponendo allora ad es. che sia la sola $\varphi_1(X_1) = 0$, mentre $\varphi_2(Y_1) \neq 0$, la (11) dimostra che σ è di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y al più: ma, osservando che essa si annulla per le $h+k-1$ coppie linearmente indipendenti:

$$\left(x_i, \int y_i \varphi_2(Y_1)\, dy\right) \quad i = 1, 2 \ldots h+k-1$$

si deduce che essa è effettivamente di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y. Il medesimo ragionamento dimostra che in questo caso τ è di rango $h-1$ rispetto ad x, $k+1$ rispetto ad y.

Una conclusione affatto analoga vale quando sia invece $\varphi_1(X_1) \neq 0$, $\varphi_2(Y_1) = 0$; basta per questo scambiare h con k, x con y, σ con τ.

Quando poi sia insieme $\varphi_1(X_1) = 0$, $\varphi_2(Y_1) = 0$, allora la (11) e l'analoga in τ dimostrano che σ è al più di rango h rispetto ad x, $k-1$ rispetto ad y; e τ al più di rango $h-1$ rispetto ad x, k rispetto ad y. La somma dei due ranghi è in tutti due i casi diminuita dunque almeno di un'unità. Ma si ricordi che le inverse delle due trasformazioni σ e τ sono due trasformazioni del Lévy, e si faccia l'osservazione evidente che una tale trasformazione può aumentare al più di una unità uno dei due ranghi dell'equazione a cui si applica: ne dedurremo allora subito che σ è di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y; τ di rango $h-1$ rispetto ad x, k rispetto ad y. Possiamo quindi enunciare il teorema:

[1] Cf. la nota [2] della pag. ant.

[2] Cf. Darboux, l. c., pag. 159.

Se l'integrale ω *della* $\Phi(u) = 0$ *è tale che sia* $\varphi_1(X_1) = 0$, $\varphi_2(Y_1) \neq 0$, *(oppure* $\varphi_1(X_1) \neq 0$, $\varphi_2(Y_1) = 0$*) la trasformazione singolare* σ *(o* τ*) conduce da equazioni di rango finito rispetto ad* x *ed ad* y, *ad equazioni del medesimo rango tanto rispetto ad* x *come rispetto ad* y*: l'altra trasformazione singolare* τ *(o* σ*) conduce invece ad equazioni, il cui rango rispetto ad* x *(o ad* y*) è diminuito di un'unità; quello rispetto ad* y *(o ad* x*) è aumentato invece di una unità.*

Quando poi sia insieme $\varphi_1(X_1) = 0$, $\varphi_2(Y_1) = 0$, *la trasformazione* σ *(o* τ*) conduce ad equazioni, il cui rango rispetto ad* x *(o ad* y*) è diminuito di un'unità; quello rispetto ad* y *(o ad* x*) è rimasto lo stesso.*

4. Sia data allora un'equazione *qualunque* di rango h rispetto ad x, k rispetto ad y e si consideri la sua equazione aggiunta (di rango k rispetto ad x, h rispetto ad y). Da questa equazione potremo allora, mediante $h+k-2$ trasformazioni σ e τ opportunamente scelte, pervenire ad un'equazione di rango 1 rispetto ad x e ad y, cioè (a meno di un cambiamento di funzione incognita) alla equazione:

$$s = 0 .$$

Tenendo conto allora del teorema, dimostrato in fine del n. 1, e della reciprocità che in certa guisa esso stabilisce tra le equazioni in z ed in σ, potremo ancora dalla equazione superiore con $h + k - 2$ trasformazioni opportune σ e τ ottenere l'equazione data: e quindi:

Tutte le equazioni lineari del secondo ordine, del tipo iperbolico, che hanno un integrale generale esplicito nelle due funzioni arbitrarie, si ottengono dall'equazione:

$$s = 0$$

mediante l'applicazione ripetuta delle trasformazioni singolari σ *e* τ.

È così dimostrato il teorema enunciato in principio.

Chimica. — *Sopra un forno elettrico tubulare* [1]. Nota di Demetrio Helbig, presentata dal Socio Cannizzaro.

Il forno elettrico di Henry Moissan, l'istrumento di riscaldamento il più potente di cui oggidì disponga la chimica, si presta maravigliosamente per tutte quelle operazioni, in cui occorre portare ad altissima temperatura una capacità ristretta: e ciò per la forma stessa dell'agente calorifico, l'arco voltaico. È però impossibile di mantenere per un certo tempo la temperatura costante, ad una altezza che non superi quella necessaria per certe determinate esperienze, e di estendere l'arroventamento ad un tratto alquanto esteso.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.