ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Ora ogni Ψ, Ψ', è esprimibile linearmente per le Φ_m di cui si conosce il peso $= mp_0$ se p_0 è quello di una Φ semplice, e per le $\Phi'_{m'}$ il cui peso è $m'p'_0$ essendo p'_0 l'analoga di p_0. I pesi delle funzioni $\varDelta, \varDelta'$, detti π, π' si possono ricavare subito dalle equazioni

$$\frac{1}{\mathrm{P}_i} = \frac{1}{\psi_i} + \frac{1}{\pi_i} \qquad \frac{1}{\mathrm{P}'_i} = \frac{1}{\psi'_i} + \frac{1}{\pi'_i}$$

essendo ψ il peso di Ψ, facilmente determinabile. Se, quindi, si dice $p_{x,i}$ il peso di una latitudine delle grandi tavole precedenti, appartenente al catalogo x^{mo} e alla stella i^{esima}, e se si chiama Π il peso finale di (2), si giunge alla formula:

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{[\mathrm{P}+\mathrm{P}']} +$$
$$+ \frac{1}{p_0} \cdot \frac{1}{[\mathrm{P}+\mathrm{P}']^2} \left[\frac{[p_{xi}]^2 - [p^2_{xi}]}{m_i}\right]_i + \frac{1}{p'_0} \frac{1}{[\mathrm{P}+\mathrm{P}']^2} \left[\frac{[p'_{xi}]^2 - [p'^2_{xi}]}{m'_i}\right]_i .$$

Con questa formula ove tutto è noto, si ricava $\Pi = 200$, e quindi l'errore medio $\pm 0''.070$. Quindi il valore definitivo della latitudine di Martorana è

$$38°.6'.55''.281 \pm 0''.070 .$$

La specola della Martorana fu già da me legata alla rete di 1° ordine; per cui si può fare il confronto di questo risultato astronomico, colla latitudine dedotta geodeticamente dalle due provenienze di Castania, e dell'Osservatorio di Palermo. Tali due latitudini di Martorana sono

da Castania	dall'Osservatorio
38°.6'.47''.413	38°.6'.55''.568

Quindi le deviazioni locali in latitudine, per la Martorana saranno:

da Castania	dall'Osservatorio
$+ 7''.868$	$- 0''.287$

Matematica. — *Sulle equazioni lineari del secondo ordine del tipo iperbolico, la cui serie di Laplace è finita in un solo senso.* Nota del prof. O. NICCOLETTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Il metodo, indicato da me in una Nota precedente (1), per costruire tutte le equazioni la cui serie di Laplace è finita in due sensi, si estende facilmente al caso in cui la serie di Laplace dell'equazione data:

$$(1) \qquad \Omega(z) = s + ap + bq + cz = 0$$

(1) Cfr O. Niccoletti, *Sulle equazioni la cui serie di Laplace è finita in ambedue i sensi* (Rendiconti Lincei, fasc. 9°, maggio 1897). Manterrò in quel che segue tutte le notazioni e convenzioni di questa Nota, che indicherò brevemente colla lettera P.

sia finita nel senso di una sola variabile. Anche in questo caso l'applicazione illimitata delle trasformazioni singolari, che in quella Nota ho indicato con σ e τ, alle due equazioni elementari:

(2) $$\frac{\partial}{\partial y}(\alpha p)=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial x}(\beta q)=0\,,$$

dà il modo di costruire tutte le equazioni in discorso. Mi propongo in questa Nota di dimostrarlo.

1. Supponiamo dunque che la serie di Laplace relativa alla equazione (1) sia limitata in un sol senso, ad es. quello della variabile x e quindi ammetta un integrale particolare della forma:

(3) $$z'=\mathrm{A}\mathrm{X}+\mathrm{A}_1\mathrm{X}'+\cdots+\mathrm{A}_{h-1}\mathrm{X}^{(h-1)}=f_1(\mathrm{X})\,.$$

L'equazione aggiunta avrà allora degli integrali particolari u'' della forma:

(4) $$u''=\alpha\mathrm{Y}+\alpha_1\mathrm{Y}'+\cdots+\alpha_{h-1}\mathrm{Y}^{(h-1)}=h_2(\mathrm{Y})$$

ed il suo integral generale u si comporrà di due parti, una uguale ad u'', l'altra u' della forma [1]:

(5) $$u'=\alpha\int\mu\mathrm{X}\,dx+\alpha_1\int\mu\frac{\partial\mu}{\partial y}\mathrm{X}\,dx+\cdots+\alpha_{h-1}\int\frac{\partial^{h-1}\mu}{\partial y^{h-1}}\mathrm{X}\,dx$$

e sarà:

(6) $$u=u'+u''.$$

Indicando allora con ω una forma particolare di u, corrispondente alle funzioni arbitrarie X_1, Y_1, la trasformazione σ applicata ad una soluzione z' della forma (3) darà [2]:

$$\sigma=\omega z'-\mathrm{B}_1(\mathrm{X}\,,\Phi_2(\omega))-\int\mathrm{X}g_1(\Phi_2(\omega))\,dx\,,$$

dove $g_1(\Phi_2(\omega))$ dipenderà dalla sola variabile x, sarà cioè:
$g_1(\Phi_2(\omega''))=0$; $g_1(\Phi_2(\omega))=g_1(\Phi_2(\omega'))=\varphi_1(\mathrm{X}_1)=$ funzione della sola x; e quindi, se $\varphi_1(\mathrm{X}_1)\neq 0$, prendendo come nuova funzione arbitraria la funzione $\dfrac{\mathrm{X}'}{\varphi_1(\mathrm{X}_1)}$:

(1) Cf. Darboux, *Leçons* etc., vol. II, pag. 34.

(2) Cf. P, n. 2.

$$(7)\qquad \sigma = \sigma' = \omega f_1\left(\frac{X'}{\varphi_1(X_1)}\right) - B_1\left(\frac{X'}{\varphi_1(X_1)}, \Phi_2(\omega)\right) - X,$$

che è rispetto ad x di rango $h+1$ al più.

Quando sia invece $\varphi_1(X_1) = 0$, allora sarà:

$$(8)\qquad \sigma = \sigma' = \omega f_1(X) - B_1(X, \Phi_2(\omega)),$$

che è rispetto ad x di rango h al più.

Affatto analogamente sarà, se $\varphi_1(X_1) \neq 0$,

$$(9)\qquad \tau = B_1\left(\frac{X'}{\varphi_1(X_1)}, \Phi_2(\omega)\right) + X;$$

che è rispetto ad x di rango h al più: e se $\varphi_1(X_1) = 0$,

$$(10)\qquad \tau = B_1(X, \Phi_2(\omega));$$

che è al più di rango $h-1$.

Un ragionamento affatto simile vale nel caso che la serie di Laplace della equazione data sia limitata nel solo senso della variabile y.

Riassumendo, abbiamo dunque che, quando la serie di Laplace della equazione (1) è limitata nel solo senso della variabile x, la trasformazione σ conduce in generale da equazioni di rango h rispetto ad x ad equazioni, il cui rango rispetto ad x è al più uguale ad $h+1$, in particolare uguale ad h o minore: la trasformazione τ conduce invece in generale ad equazioni che hanno al più il rango h, in particolare al più $h-1$ (sempre rispetto ad x): ed un risultato perfettamente analogo vale nel caso che la serie di Laplace dell'equazione data sia limitata nel solo senso della variabile y, permutando allora le due trasformazioni. Ma, tenendo conto della relazione tra le equazioni in z e σ [1], possiamo precisare il risultato superiore ed affermare che nel caso generale di $\varphi_1(X_1) \neq 0$, la σ sarà effettivamente di rango $h+1$ rispetto ad x, la τ di rango h: quando sia invece $\varphi_1(X_1) = 0$, la σ sarà di rango h, la τ di rango $h-1$ (ed un risultato del tutto analogo si ha scambiando x con y, σ con τ).

Si consideri infatti ad es. un'equazione di rango finito, uguale a k, rispetto ad y. Da essa, mediante un'opportuna trasformazione σ possiamo certamente, per quello che precede, ottenere un'equazione il cui rango rispetto ad y è minore di k. Le due equazioni aggiunte di queste due hanno allora,

[1] Cf. P, n. 1.

la prima il rango k rispetto ad x, la seconda un rango minore e inoltre, pel teorema sopra ricordato [1], dalla seconda si ottiene la prima con una certa trasformazione σ. Questo dimostra insieme che la trasformazione σ deve in generale aumentare il rango della equazione rispetto ad x di *una* unità, e se l'equazione ha invece un rango finito rispetto ad y, può in casi particolari diminuirlo di *una* unità al più. Analogamente, osservando che per un'equazione di rango finito rispetto ad y la trasformazione σ non può mai aumentare il rango, ne deduciamo ancora che inversamente la σ non può mai diminuire il rango di un'equazione rispetto ad x: e questo, ragionando come sopra, dimostra che la trasformazione σ conserva il rango di una equazione rispetto ad x in casi particolari, rispetto ad y nel caso generale. Un ragionamento perfettamente simile vale per la trasformazione τ (sebbene sia per questa inutile il ripeterlo, in quanto risulta subito dall'osservare che le due funzioni σ e τ si deducono l'una dall'altra con una trasformazione di Laplace); possiamo dunque enunciare il teorema:

La trasformazione σ (o τ) conduce in generale da equazioni di rango h rispetto ad x ad equazioni di rango $h+1$ (od h) rispetto ad x ed in particolare ad equazioni di rango h (od $h-1$). Quando invece l'equazione abbia un rango finito rispetto ad y, conviene scambiare le due trasformazioni.

E di qui anche segue [2]:

Partendo dall'equazione più generale di rango 1 rispetto ad x (o ad y), cioè dalla equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha q)=0 \quad \left(\textit{oppure } \frac{\partial}{\partial y}(\alpha p)=0\right)$$

la trasformazione σ (o la τ), ripetuta un numero illimitato di volte, conduce a tutte *le equazioni di rango finito rispetto ad x (o ad y).*

2. Abbiamo ammesso al n. precedente, l'esistenza di funzioni X_1 che annullino $\varphi_1(X_1)$; che soddisfino cioè ad una relazione della forma (ponendo X in luogo di X_1):

$$(11)\qquad \lambda_1\int_{x_0}^{x}\mu_1 X dx+\lambda_2\int_{x_0}^{x}\mu_2 X dx+\cdots+\lambda_i\int_{x_0}^{x}\mu_i X dx+\alpha X'+\cdots+\alpha_k X^{(k)}=0$$

essendo le λ, μ, α funzioni note della *sola* x. Dimostriamo ora l'esistenza di tali funzioni e più in generale di funzioni X che soddisfano ad una relazione:

$$(11^*)\ \lambda_1\int_{x_0}^{x}\mu_1\, X\, dx+\cdots+\lambda_i\int_{x_0}^{x}\mu_i\, X\, dx+\alpha X+\alpha_1 X'+\cdots+\alpha_k X^{(k)}=A$$

dove A è ancora una funzione nota della x.

[1] Cf. P, n. 1.
[2] Cf. P, n. 4.

Supponiamo perciò che sia X una soluzione (integrale) della (11*); facendo in essa $\lambda_1 = 1$, il che evidentemente è possibile, e derivando rispetto ad x, otteniamo:

$$\frac{d\lambda_2}{dx}\int_{x_0}^{x}\mu_2 X dx + \cdots + \frac{d\lambda_i}{dx}\int_{x_0}^{x}\mu_i X dx + \left(\frac{d\alpha}{dx} + \mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots + \lambda_i\mu_i\right) X$$
$$+ \left(\alpha + \frac{d\alpha_1}{dx}\right) X' + \cdots + \alpha_k X^{(k+1)} = \frac{dA}{dx};$$

cioè la X soddisfa altresì ad una relazione analoga alla (11*), nella quale però i e k sono stati sostituiti da $i-1$ e $k+1$. Reciprocamente, supponiamo che si conosca una funzione X che soddisfi alla relazione:

$$\xi_2\int_{x_0}^{x}\varrho_2 X dx + \cdots + \xi_i\int_{x_0}^{x}\varrho_i X dx + \beta X + \beta_1 X' + \cdots + \beta_{k+1} X^{(k+1)} = B,$$

avremo allora integrando tra x_0 ed x:

$$\sum_2^i {}_r \int_{x_0}^{x}\left\{\xi_r\int_{x_0}^{x}\varrho_r\, X\, dx\right\} dx + \int_{x_0}^{x}\beta X\, dx + \sum_1^{k+1} {}_t \int_{x_0}^{x}\beta_t\, X^{(t)}\, dx = \int_{x_0}^{x} B\, dx$$

Ma, integrando per parti, e ponendo:

$$\lambda_r = \int_{x_0}^{x}\xi_r\, dx,$$

si avrà:

$$\int_{x_0}^{x}\beta_t\, X^{(t)}\, dx = (-1)^t\int_{x_0}^{x}\beta_t^{(t)} X\, dx + \left\{\sum_1^t {}_h (-1)^{t-h} X^{(h-1)}\, \beta_t^{(t-h)}\right\}_{x_0}^{x};$$
$$\int_{x_0}^{x}\left\{\xi_r\int_{x_0}^{x}\varrho_r\, X\, dx\right\} dx = \lambda_r\int_{x_0}^{x}\varrho_r\, X\, dx - \int_{x_0}^{x}\varrho_r\, \lambda_r\, X\, dx;$$

e quindi sarà:

$$\int_{x_0}^{x}\left\{\beta - \sum_2^i {}_r \lambda_r\varrho_r + \sum_1^{k+1} {}_t (-1)^t \beta_t^{(t)}\right\} X\, dx + \sum_2^i {}_r \lambda_r\int_{x_0}^{x}\varrho_r X dx + \sum_1^k {}_t \gamma_t X^{(t)} = A_1,$$

cioè X soddisfa ad una relazione, che disponendo opportunamente delle funzioni $\beta_1\, \lambda_r$, ϱ_r ed A_1 si può identificare colla (11*).

Ne segue che le funzioni X che soddisfano alla (11*) sono gli integrali di una equazione differenziale lineare (non omogenea) di ordine $k+i$. Esistono dunque di tali funzioni X ed è dato anche un metodo per trovarle. Con ciò la dimostrazione superiore è completata.

3. Gli sviluppi superiori dimostrano il teorema enunciato in principio: essi conducono inoltre a delle conseguenze interessanti che importa notare.

Ricordiamo perciò innanzi tutto che le due trasformazioni del Lewy sono le inverse delle due trasformazioni σ e τ [1]: valgono dunque per esse delle proprietà affatto simili a quelle dimostrate sopra per la σ e la τ: ed in particolare:

L'applicazione illimitata delle due trasformazioni del Lewy all'equazione elementare:

$$s = 0$$

conduce a tutte *le equazioni del 2° ordine, la cui serie di Laplace è finita nei due sensi;*

ed ancora:

L'applicazione illimitata della prima (o della seconda) trasformazione del Lewy all'equazione elementare

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha q) = 0 \quad \left(oppure\ \frac{\partial}{\partial y}(\beta p) = 0\right)$$

conduce a tutte *le equazioni lineari del secondo ordine, la cui serie di Laplace è terminata nel solo senso della variabile x (o della y).*

Questo è appunto il metodo tenuto dal Darboux nelle sue lezioni per la costruzione di queste equazioni [2].

Un' altra conseguenza notevole riguarda la risoluzione del problema di Cauchy per una qualunque di queste equazioni. Ricordiamo infatti che il metodo di Riemann per l'integrazione di un'equazione del tipo iperbolico riconduce la risoluzione del problema di Cauchy alla determinazione di un integrale particolare dell'equazione stessa, la *soluzione principale* [3]. E facile inoltre vedere, che, nota la soluzione principale di una data equazione, è pure nota con quadrature la soluzione principale di ogni sua trasformata differenziale ed integrale [4]. Osservando allora che la soluzione principale della equazione:

$$s = 0$$

(1) Cf. P, n. 1.

(2) Cf. Darboux, l. c., cap. II, VI, VII.

(3) Ibid., pag. 71 e segg.

(4) Accenniamo la dimostrazione per una delle due trasformazioni singolari, ad es. per la σ. La soluzione principale dell'equazione in σ è determinata dai valori che essa prende lungo due rette parallele agli assi coordinati e dal prender nel punto comune il valore 1. Ma allora in forza delle due relazioni

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u\,.\,(p + bz)\,; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = z\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - au_0\right);$$

lungo la retta parallela all'asse x si ha il valore della z con due quadrature, lungo il tratto parallelo all'asse y immediatamente. Costruendo allora della equazione (1) quell'in-è uguale ad 1, quella delle equazioni più generali di rango 1 rispetto ad x (o ad y):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha q) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\beta p) = 0\,,$$

è rispettivamente uguale a:

$$\frac{\alpha(x\,,y_0)}{\alpha(x_0\,,y_0)}\;;\quad \frac{\beta(x_0\,.\,y)}{\beta(x_0\,,y_0)},$$

(essendo $x_0\,,y_0$ il punto ove la soluzione principale si suol calcolare), ne segue il teorema (già trovato per altra via dal Goursat):

Se un' equazione lineare del 2° ordine è integrabile col metodo di Laplace, la determinazione della sua soluzione principale e quindi la risoluzione del problema di Cauchy è per essa ricondotta alle quadrature.

4. Facciamo infine un' osservazione di indole storica. Il Moutard, nella sua celebre Memoria perduta negli incendî della Comune del 1871, aveva trattato il problema della determinazione e costruzione di *tutte* le equazioni del secondo ordine con integrale generale esplicito. Nella prima parte della sua Memoria egli dava la forma di queste equazioni e ne riduceva l' integrazione a quella di un' equazione lineare, ancora con integrale esplicito, del tipo di Laplace: nella seconda parte dava un metodo per la costruzione di tutte queste equazioni: nella terza, la sola che ci sia rimasta, perchè nuovamente redatta dal Moutard, son determinate tutte le equazioni con invarianti uguali. Recentemente, in una Nota alle lezioni di Darboux, la prima parte è stata ricostruita dal Cosserat: ed è poi evidente che i teoremi che precedono (¹) possono, volendo, riguardarsi come una ricostruzione della seconda parte della Memoria di Moutard. Anzi, se si osserva la grande analogia del nostro procedimento con quello tenuto dal Moutard (e dal Darboux) per le equazioni ad invarianti uguali, non è assurdo il pensare che il metodo tenuto dal Moutard nella seconda parte della sua Memoria, se pure non uguale a quello superiore, pure non doveva essere molto dissimile da esso; in fondo poi equivalente.

E si presenta ora opportuna un' altra osservazione. Il metodo di Moutardi dà, è vero, il metodo di costruire (per via ricorrente) tutte le equazioni del secondo ordine con integrale generale esplicito (o semiesplicito): ma sia esso, come anche il metodo di Laplace non danno un criterio per riconoscere a priori con un numero *finito* di operazioni se una *data* equazione del

---

tegrale z che prende lungo i due tratti rettilinei i valori così ottenuti (il che, per l'ipotesi fatta, si fa con quadrature), la funzione σ corrispondente all'integrale z superiore è la soluzione principale della sua equazione. E analogamente per la τ.

(¹) (e quelli della nota P).

secondo ordine abbia o no un integrale generale esplicito. Infatti sì l'uno che l'altro ci dicono che, se l'equazione data ha un tale integrale generale, dopo un certo numero di operazioni si perviene a determinarlo; ma, quando applicando illimitatamente l'uno o l'altro metodo, essi non ci diano alcun risultato, non è lecito per l'equazione data concludere nulla. I due metodi superiori lasciano dunque insoluto il problema generale di « *Riconoscere con un numero* finito *di operazioni, se una data equazione del tipo iperbolico sia integrabile col metodo di Laplace* ». Recentemente il Goursat ha portato un contributo a questa teoria: ma il problema generale ora enunciato, di cui è manifesta l'importanza, attende ancora una soluzione.

P. B.