ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° Semestre

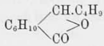
ROMA

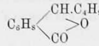
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

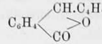
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

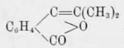
Dalla presente ricerca risulta dunque che l'odore di sedano non è peculiare di una sola sostanza, ma che molti dei composti, dei quali ci siamo occupati, lo possiedono in vario grado. Va notata in special modo, la seguente serie, i di cui termini, indipendentemente dal grado di saturazione dell'anello esatomico fondamentale, hanno tutti pronunciatissimo l'odore del sedano:


esaidrobutilftalide

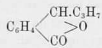

tetraidrobutilftalide


butilftalide

Questo interessante fatto fece nascere in noi il desiderio di imparare a conoscere per propria esperienza qualche derivato noto della ftalide, ed a questo scopo abbiamo preparato l' *isopropilidenftalide* di Roser [1]



L' isopropilidenftalide stessa e massime il suo prodotto di idrogenazione, a cui spetta probabilmente la formola



possiedono realmente un' odore, che ricorda quello dell' essenza di sedano.

Lo studio ulteriore di questi corpi e di altri derivati della ftalide non sarà perciò privo di interesse.

Fisica-matematica — *Sulla scarica elettrica nei gas e sopra alcuni fenomeni di elettrolisi.* Nota del Corrisp. Vito Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo.* Nota di G. Castelnuovo, presentata dal Socio Cremona.

Il sig. Nöther ricercando, in una classica Memoria, quelle proprietà di una superficie algebrica che non vengono alterate da una trasformazione birazionale, ha introdotto, tra gli altri caratteri invariantivi, il *genere lineare* (o *Curvengeschlecht*), che d'ordinario viene indicato con $p^{(1)}$. Ora la definizione di $p^{(1)}$ data dal sig. Nöther è tale da non potersi applicare a tutte le

[1] Berichte, vol. XVII, pag. 2776.

superficie algebriche; per alcune superficie si doveva concludere che esse non possedevano genere lineare. Si è cercato di togliere una tale eccezione modificando convenientemente la definizione di $p^{(1)}$; ed il sig. Enriques ha fatto qualche passo verso questa meta. Però il risultato definitivo viene raggiunto soltanto colla ricerca, che mi propongo di esporre sommariamente in questa Nota ed in una Nota successiva. E non solo mostrerò che esiste per ogni superficie un carattere invariantivo, che può definirsi come il genere lineare $p^{(1)}$ (poichè la nuova definizione coincide coll'antica, quando questa sia applicabile); ma mostrerò inoltre quale importanza abbia il valore di $p^{(1)}$ nello studio delle proprietà della superficie. Si vedrà infatti che le superficie algebriche possono dividersi in due grandi famiglie secondo il valore del genere lineare $p^{(1)}$ (1). Precisamente distingueremo:

1) *le superficie per cui* $p^{(1)} \geqq 1$; sopra di queste la successione formata da un sistema lineare di curve qualsiasi, e dai sistemi successivi aggiunti, è *illimitata*;

2) *le superficie per cui* $p^{(1)} \leqq 0$; sopra di queste invece la successione formata nel modo ora detto, si compone di un numero *finito* di sistemi.

Noi ancora saremo condotti a suddividere le superficie della seconda famiglia in due categorie, per rispetto ai valori di un secondo invariante $\mathfrak{p}^{(1)}$, che introdurremo con una definizione affine a quella che ci dà $p^{(1)}$; chiameremo $\mathfrak{p}^{(1)}$ *genere lineare secondario*. Orbene noi distingueremo:

2') *le superficie per cui* $\mathfrak{p}^{(1)} > 1$; tra queste si trovano le superficie razionali, e forse altre di cui però non si possiede per ora alcun esempio;

2'') *le superficie per cui* $\mathfrak{p}^{(1)} \leqq 1$; queste ultime si possono caratterizzare in modo completo, giacchè si dimostra che *esse contengono un fascio irrazionale di curve razionali*, e quindi possono trasformarsi birazionalmente o in rigate, o in superficie possedenti un fascio di coniche. Così adunque si raggiunge, tra gli altri, questo risultato, di definire completamente la famiglia delle superficie contenenti un fascio di curve razionali mediante i valori di due invarianti numerici $p^{(1)} \leqq 0$, $\mathfrak{p}^{(1)} \leqq 1$.

1. Per maggior chiarezza riferisco brevemente le definizioni di $p^{(1)}$ dovute al sig. Nöther ed al sig. Enriques.

Il sig. Nöther (2) parte da una superficie F data mediante i suoi caratteri proiettivi (superficie dello spazio ordinario, di un certo ordine n, dotata di certe singolarità...), e costruisce le superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad F, supposte esistenti. Ciascuna di queste sega la superficie F, all'infuori delle curve multiple e di certe curve *eccezionali* (di cui presto dovrò parlare), lungo un curva K che, al variare della superficie secante, descrive sopra F un sistema

(1) Una ulteriore classificazione si può fare attribuendo al carattere $p^{(1)}$ valori numerici particolari. Sulle superficie che corrispondono ai valori $p^{(1)} = 2, 3$, si possono consultare due Note del sig. Enriques nei Rendiconti di questa Accademia, 1897.

(2) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...*, Math. Annalen, 8.

lineare $|K|$, il *sistema canonico*. Il genere della curva K è precisamente (secondo il sig. Nöther) il *genere lineare* $p^{(1)}$ della superficie F.

Ora è chiaro che la definizione *geometrica* di $p^{(1)}$ qui riportata, si applica soltanto alle superficie F d'ordine n, che posseggono *almeno una* superficie aggiunta d'ordine $n-4$; in altri termini, si richiede che il genere geometrico p_g della superficie F sia $\geqq 1$.

Per ovviare a questo inconveniente il sig. Enriques propose una definizione *numerica* del carattere $p^{(1)}$, la quale si estende anche ad una parte delle superficie aventi $p_g = 0$. Noi esporremo la nuova definizione, dopo di esserci fermati un po' sul concetto di curva *eccezionale*, che è necessario di posseder chiaramente per procedere in quest'ordine di ricerche.

2. Quando tra due superficie algebriche F ed F′, date mediante i loro caratteri proiettivi, passa una corrispondenza birazionale, ad ogni punto semplice dell'una, ad es. di F′, corrisponde in generale un punto semplice di F. Però possono esistere su F′ certi punti semplici (in numero finito), a ciascuno dei quali corrisponde su F, non più un punto, ma una curva. Ogni curva siffatta, necessariamente razionale, dicesi *curva eccezionale* (*ausgezeichnete*) di F. Per ottenere *tutte* le curve eccezionali che F possiede, occorre però di mettere in relazione la F con tutte le superficie che possono ottenersi da F mediante trasformazioni birazionali, ossia con tutte le superficie della *classe* (in senso Riemanniano) a cui F appartiene; si dirà *eccezionale* ogni curva di F, che corrisponda ad un punto semplice di una qualsiasi tra le superficie della classe.

Una superficie può possedere un numero finito o infinito di curve eccezionali; e sia l'una, sia l'altra proprietà si trasmette a tutte le superficie della *classe*. Superficie contenenti un numero finito di curve eccezionali sono, ad esempio, tutte quelle che hanno il genere geometrico $p_g > 0$ (quindi la superficie generale di ordine superiore a tre nel nostro spazio, ecc.). Invece tra le superficie che posseggono infinite curve eccezionali, si trovano il piano e le rigate; infatti sul piano è eccezionale ogni retta, ed ogni curva che possa mutarsi in una retta mediante una trasformazione cremoniana; e sopra una rigata è eccezionale ogni generatrice. Se poi oltre alle superficie razionali, ed alle superficie contenenti un fascio (serie di indice 1) di curve razionali, esistano altre superficie dotate di infinite curve eccezionali, ancora non è noto. La questione qui enunciata, ha però una importanza grandissima nella teoria delle superficie algebriche.

Un'altra questione si può porre riguardo alle superficie che posseggono un numero *finito* di curve eccezionali. Se F è una tale superficie, la proprietà che essa gode, si trasmette, come abbiamo detto, a tutte le superficie della *classe* a cui F appartiene; ma il numero delle curve eccezionali può variare passando dall'una all'altra di queste superficie. Ora fra tutte le superficie della classe, esisterà una che sia priva di curve eccezionali? In altre parole, sarà possibile trasformare la F, che ha un numero finito di curve eccezionali, in un'altra superficie che non ne possieda alcuna? Il sig. Enriques [1] ha risposto in modo affermativo alla domanda sotto ipotesi molto larghe relative alla superficie F; ma non è noto se la stessa risposta valga in ogni caso.

3. Ora siamo in grado di comprendere facilmente la definizione numerica del genere lineare $p^{(1)}$ data dal sig. Enriques [2].

Si abbia una superficie dotata di un numero *finito* di curve eccezionali, e si supponga inoltre che la superficie possa trasformarsi birazionalmente in un'altra priva di curve eccezionali. Indichiamo con F quest'ultima superficie, che a noi basta considerare. Fissiamo poi sopra F un sistema lineare $|C|$ di curve *privo di punti base* (ad es. il sistema delle sezioni piane di F), ed indichiamo con n il *grado* di $|C|$ (numero delle intersezioni variabili di due curve C), e con π il *genere* della curva C generica; sia inoltre π' il genere della curva generica C', appartenente al sistema $|C'|$ *aggiunto a* $|C|$. Con tali caratteri si formi la espressione

$$n + \pi' - 3\ (\pi - 1). \tag{1}$$

Orbene il sig. Enriques dimostra:

1) che il valore della (1) coincide col genere lineare $p^{(1)}$ di F, quando $p^{(1)}$ possa definirsi per la via geometrica sopra riferita;

2) che, pur lasciando cader l'ultima ipotesi, la espressione (1) non muta valore, quando essa venga calcolata coi caratteri di un nuovo sistema $|D|$ di curve situato sulla superficie F, e privo esso pure di punti base.

Egli conclude da ciò che la espressione (1) definisce, per via numerica, un invariante della superficie F, rispetto alle trasformazioni birazionali; e chiama quell'invariante *genere lineare* (numerico) $p^{(1)}$ della superficie F, anche nei casi in cui la definizione geometrica cade in difetto.

Riguardo alla definizione numerica di $p^{(1)}$, giova notare che, se si abbandona la condizione imposta al sistema lineare $|C|$ di non aver punti base sulla superficie F, e si opera invece sopra un sistema lineare *qualsiasi* di curve su F, il valore della espressione (1), calcolata coi caratteri del nuovo sistema, può differire da $p^{(1)}$, ma è in ogni caso $\leq p^{(1)}$. Sicchè $p^{(1)}$ può definirsi come il massimo valore assunto dalla espressione (1), in corrispondenza agli infiniti sistemi lineari di curve appartenenti alla superficie F. Ora con semplici osservazioni, e rimanendo sempre nell'ordine di idee in cui si è posto il sig. Enriques, si vede facilmente che quella definizione di $p^{(1)}$ si estende subito a tutte le superficie dotate di un numero *finito* di curve ec-

[1] *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, n. 42; Memorie della Soc. ital. delle Scienze, 1896.

[2] L. c., n. 41.

cezionali; mentre la restrizione che la superficie possa trasformarsi in una *priva* di curve eccezionali, appare superflua. Si perviene così alla definizione che segue:

Sopra una superficie dotata di un numero finito di curve eccezionali, si consideri un sistema lineare di curve, e coi caratteri di esso (e del sistema aggiunto) si calcoli la espressione

$$\omega = n + \pi' - 3\ (\pi - 1); \tag{2}$$

il valore di ω varia col variare del sistema su cui si opera, ma ammette sempre un massimo finito, che noi diremo genere lineare $p^{(1)}$ della superficie.

Con ciò noi abbiamo esposto, con minime aggiunte, la definizione di $p^{(1)}$ data dal sig. Enriques.

4. Quando però noi passiamo a considerare una superficie dotata di *infinite* curve eccezionali, ci troviamo in un campo interamente nuovo. Il ragionamento col quale (seguendo il sig. Enriques) si prova che il valore variabile di ω ammette un massimo finito, non si applica più a questo nuovo caso. E siamo condotti a domandarci se quel massimo esista ancora nelle nuove ipotesi. Orbene, così è. Io dimostrerò infatti che *sopra una superficie qualsiasi, il valore di ω*, variabile col sistema che serve a calcolarlo, *ammette un massimo finito*; quel massimo sarà evidentemente un *invariante della superficie* rispetto alle trasformazioni birazionali. Anzi il procedimento stesso che seguirò, mi condurrà a considerare due valori *massimi* di ω, che godono entrambi *carattere invariantivo*.

Il primo *massimo* si riferisce ai valori che assume la espressione ω, quando ci si limiti a considerare sulla superficie quei sistemi lineari di curve per cui $n \leqq 2\pi - 2$; questo massimo, che esiste sopra tutte le superficie, noi continueremo ad indicare con $p^{(1)}$, ed a chiamare *genere lineare (principale)* della superficie.

Il secondo *massimo* di ω si riferisce invece a quei sistemi lineari per cui $n > 2\pi - 2$; siccome esistono superficie che non posseggono sistemi siffatti, così quel nuovo invariante verrà solo considerato sopra particolari superficie; esso, quando esista, sarà indicato con $\mathbf{p}^{(1)}$, e sarà chiamato *genere lineare secondario* della superficie.

Pur astraendo da questa distinzione, farò notare che la esistenza di un valore *massimo* di ω conduce a varie proprietà delle superficie appartenenti ad una medesima *classe*. Non intendo ora di fermarmi su ciò, e mi basterà di enunciare qui una di quelle proprietà, sebbene non si debba farne uso nel seguito.

« Fra le infinite superficie appartenenti ad una data classe, si può sempre
« costruirne una Φ dotata della seguente proprietà caratteristica: se con una
« trasformazione birazionale si muta la Φ in un'altra superficie F qualsiasi

« della classe, il numero dei punti di Φ che si mutano in curve eccezionali « di F, è superiore od uguale al numero dei punti di F che si mutano in « curve eccezionali di Φ ». Se le superficie della classe posseggono un numero finito di curve eccezionali, la Φ possiede il numero *minimo* di curve eccezionali compatibile colla classe, e quindi la esistenza della Φ è prevedibile *a priori*. Ma la Φ esiste anche se le superficie della classe posseggono infinite curve eccezionali; e ad es. tra le *superficie razionali*, il *piano* gode la proprietà della Φ.

5. Prima di giungere alle proposizioni sopra accennate, è opportuno fermarsi un po' sulla distinzione dei sistemi lineari di curve in due categorie, secondo che è $n \leqq 2\pi - 2$, oppure $n > 2\pi - 2$. Ecco per qual via si arriva naturalmente a quella distinzione.

Sopra una superficie algebrica qualsiasi F si definisce, come è noto, una operazione, detta *aggiunzione*, mediante la quale si passa da un sistema lineare qualsiasi $|C|$ di curve su F, al sistema *aggiunto* $|C'|$. La stessa operazione applicata a $|C'|$ conduce ad un nuovo sistema $|C''|$, che dicesi il *secondo aggiunto* di $|C|$; e così via. Ora si formi la successione

$$|C|, |C'|, |C''|, \ldots$$

composta di un sistema lineare e dei successivi aggiunti. Due casi possono presentarsi, secondo che quella successione è illimitata, oppure si compone di un numero finito di termini. Ora si dimostra che il presentarsi dell'uno, o dell'altro caso, non dipende dal sistema $|C|$ che si fissa sopra la superficie F, ma dipende dalla natura della superficie F, intesa in senso invariantivo. Si è condotti così a dividere tutte le superficie algebriche in due grandi famiglie.

1) Diremo che una superficie appartiene alla *prima famiglia*, se è illimitata la successione formata coi successivi aggiunti di un sistema lineare di curve $|C|$, comunque scelto sulla superficie. Appartengono dunque alla prima famiglia le superficie di genere geometrico $p_g > 0$, poichè su queste esiste un sistema *canonico* $|K|$, tale che $|C'| = |C + K|$, ecc. Ma quando pure mancasse il sistema canonico $|K|$ $(p_g = 0)$, esistendo però il sistema bicanonico $|2K|$ $(P_2 > 0)$, o qualcuno dei sistemi pluricanonici, sempre la superficie apparterrebbe alla prima famiglia.

2) Diremo invece che una superficie appartiene alla *seconda famiglia*, quando la successione formata coi successivi aggiunti di un sistema lineare di curve comunque scelto sulla superficie, si compone di un numero finito di termini. Appartengono dunque alla seconda famiglia il *piano*, le *superficie rigate*, . . .

I sistemi lineari di curve appartenenti alle superficie dell'una o dell'altra famiglia, si distinguono per una proprietà che giova qui enunciare, perchè è strettamente collegata colle questioni che andiamo trattando. Indichiamo al solito con n e π il *grado* ed il *genere* di un sistema lineare di curve appartenente alla superficie, e con π' il *genere* dal sistema aggiunto. Si riconosce allora che

1) *Sopra una superficie della prima famiglia, ogni sistema lineare di curve soddisfa alle relazioni*

$$n \leqq 2\pi - 2, \quad \pi \leqq \pi'$$

2) *Sopra una superficie della seconda famiglia* (*oltre a sistemi per cui* $n \leqq 2\pi - 2$) *esistono sempre sistemi di curve soddisfacenti alle relazioni*

$$n > 2\pi - 2, \quad \pi > \pi'.$$

Si può ancora notare, sebbene l'osservazione non giovi pel seguito, che le superficie della prima famiglia hanno un numero *finito* di curve eccezionali; mentre le superficie della seconda famiglia, che sinora si conoscono, posseggono *infinite* curve eccezionali. Se questa particolarità spetti a tutte le superficie della seconda famiglia, non si può affermare.

Esaurite queste premesse, possiamo passare alla ricerca che forma l'oggetto del presente lavoro. Ad essa è dedicata la Nota che segue.

Chimica. — *Costituzione dei pirrodiazoloni.* Nota di A. Andreocci, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

La struttura dei pirrodiazoloni da me ottenuti alcuni anni indietro ([1]) dipende essenzialmente da quella del fenil-metil-pirrodiazolone da cui tutti derivano. Siccome per questa sostanza sono possibili oltre le forme tautomere imminica ed ossidrilica, varie strutture secondo le interpretazioni che si possono dare alla sua genesi, dalla reazione della fenilidrazina sull'acetil uretano, così conviene anzitutto discutere tali interpretazioni.

Ammettendo infatti che questa reazione avvenga in due fasi distinte e che l'acetil uretano possa reagire o coll'una, o coll'altra, delle sue due forme tautomere ([2]),

$$\begin{array}{r} CH^3-C{=}O \\ | \\ H^5C^2.O^2C-NH \end{array} \qquad \begin{array}{r} CH^3-C-OH \\ \| \\ H^5C^2.O^2C-N \end{array} ,$$

si possono spiegare le due suddette fasi nel modo seguente:

([1]) Questi Rendiconti, 1889, vol. V, pag. 115; 1890, vol. VI, pag. 209.

([2]) L'acetil-uretano col sodio metallico forma il composto sodico e cogli ossidi di argento e di mercurio i composti argentico e mercurico. Mi riserbo lo studio, già iniziato (questi Rendiconti 1892, vol. I, p. 257), dell'azione dei derivati alogenati alchilici sopra i detti composti metallici, collo scopo di conoscere se l'acetil-uretano può dare le due serie di derivati alchilici isomere, in forma *ossidrilica* o *lattimica* ed in forma *imminica* o *lattamica*.