ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Matematica. — *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo* [1]. Nota di G. CASTELNUOVO, presentata dal Socio CREMONA.

6. Riprendiamo la espressione

$$\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) \tag{2}$$

formata col *grado* n e col *genere* π di un sistema lineare di curve $|C|$, scelto comunque sulla superficie F che si considera; e sia $|C'|$ il sistema aggiunto a $|C|$, sistema avente il *genere* π'. Il valore di ω dipende dal sistema $|C|$ su cui si opera, è una funzione di $|C|$; noi vogliamo dimostrare che la funzione possiede un *massimo* finito, qualunque sia la superficie F su cui si ragiona [2].

Limitiamoci per ora a considerare quei sistemi $|C|$ irriducibili, almeno ∞^2, per i quali è verificata la relazione

$$n \leq 2\pi - 2. \tag{3}$$

Noi sappiamo dal paragrafo precedente che alla (3) si può sempre soddisfare, sopra una superficie F qualsiasi; anzi se la superficie appartiene alla prima famiglia, la (3) è soddisfatta da *ogni* sistema $|C|$.

Ciò premesso, per raggiungere lo scopo propostoci, esaminiamo anzitutto se il sistema $|C|$ è contenuto nel proprio aggiunto $|C'|$, ed in caso affermativo costruiamo il sistema differenza $|C' - C|$. Quest'ultimo sistema (da cui si tolgano eventualmente le curve eccezionali che formano parte di ognuna delle sue curve), se esiste, non dipende dal sistema $|C|$ su cui si opera. Esso (sistema *canonico*) è un *invariante* della superficie F, e la sua dimensione aumentata di una unità, dà il genere geometrico p_g di F. In generale, se, scelto un numero i intero positivo qualsiasi, si formano i sistemi $|iC|$ ed $|iC'|$ multipli di $|C|$ e $|C'|$ secondo i, e si costruisce poi la differenza $|iC' - iC|$, quest'ultimo sistema (sistema *i-canonico*), quando esiste, è legato invariantivamente colla superficie, e la dimensione $P_i - 1$ di esso dà un nuovo invariante della superficie, rispetto alle trasformazioni birazionali; ($P_1 = p_g$). Ora partendo dai caratteri (grado, genere e dimensione) dei sistemi $|C|$ e $|C'|$, si ha un modo per fissare un limite inferiore a P_i, giacchè basta calcolare i caratteri di $|iC|$ ed $|iC'|$, esaminare la serie di gruppi che $|iC'|$ sega sulla

[1] V. pag. 372.

[2] Sarebbe facile dimostrare, ma a noi non interessa, che la funzione ω non ha minimo finito.

curva generica di $|iC|$, ecc. Per questa via, che qui è semplicemente accennata, si arriva, tenendo conto della (3), alla relazione

$$P_i \geqq p_n + \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1), \tag{4}$$

dove p_n è il *genere numerico* della superficie F (carattere che gode proprietà invariante), ed ω ha il significato indicato dalla (2).

Ora basta osservare che nella (4), sia P_i, sia p_n, hanno valori indipendenti del sistema $|C|$ su cui si opera; ω invece varia con $|C|$. Ma è chiaro che ω non potrà crescere oltre ad un certo limite, che la (4) fissa. Dunque il numero intero ω ammette un *valore massimo;* e ciò non solo sopra le superficie aventi $P_i > 0$, alle quali poteva già applicarsi il ragionamento del sig. Enriques (n. 3), ma pure sulle superficie aventi $P_i = 0$, che a quel ragionamento sfuggivano. Arriviamo così al seguente teorema:

Se coi caratteri di tutti i sistemi lineari di curve, almeno ∞^2, che appartengono ad una data superficie e soddisfanno alla relazione

$$n \leqq 2\pi - 2, \tag{3}$$

si calcola la espressione

$$\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1), \tag{2}$$

si ottengono infiniti valori di ω, i quali ammettono un massimo finito.

Quel valore massimo non varia evidentemente, quando alla superficie F si applica una trasformazione birazionale, è un *invariante* della superficie. Noi lo indicheremo con $p^{(1)}$, e lo chiameremo *genere lineare* della superficie, poichè esso coincide col carattere noto sotto questo nome, nei casi in cui è applicabile la definizione del sig. Nöther, o quella del sig. Enriques.

Ma la nostra definizione di $p^{(1)}$, a differenza delle precedenti, si estende a *tutte* le superficie algebriche.

7. La definizione che abbiamo dato del carattere $p^{(1)}$, ha pure il vantaggio di mostrare in quale relazione stia il valore di $p^{(1)}$ colle proprietà della superficie. Infatti, nella formola (4) noi possiamo scrivere in luogo della variabile ω, la costante $p^{(1)}$, che è uno dei valori assunti da quella variabile: ed abbiamo così la relazione

$$P_i \geqq p_n + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1). \tag{5}$$

Ora questa ci mostra subito che se il genere lineare della superficie considerata supera l'unità ($p^{(1)} > 1$), l'invariante P_i risulta certo positivo in corrispondenza a tutti i valori di i superiori ad un certo limite; per quei valori di i la superficie possiede dunque il sistema i.canonico. E tanto basta per affermare che la superficie appartiene alla *prima* delle due famiglie considerate nel § 5.

Se però la superficie ha il genere lineare $p^{(1)} = 1$, la relazione (5) non dice più nulla. Il sistema *i*.canonico $|iC' - iC|$ può mancare, per quanto grande sia i; almeno noi non riusciamo ad escludere questo caso. Cerchiamo invece se, nella ipotesi $p^{(1)} = 1$, esista il sistema $|iC' - (i-1)C|$, il quale può differire soltanto per qualche curva fissa dal sistema $|C^{(i)}|$, i^{esimo} aggiunto di $|C|$. Seguendo la via accennata nel paragrafo precedente, e tenendo conto della (3), noi troviamo che la condizione sufficiente per l'esistenza di $|C^{(i)}|$ è espressa dalla relazione

$$(6) \qquad p_n + \pi + \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + (i-1)(2n - 2 - n) > 0.$$

Ora si può sempre porre in luogo di ω il valore $p^{(1)} = 1$, purchè si scelga convenientemente il sistema $|C|$, soddisfacente alla (3). E si riconosce che questa scelta può farsi in modo, che il genere π di $|C|$ risulti superiore a $-p_n$. Si vede allora che la (6) è certo soddisfatta qualunque sia i; esiste dunque sulla superficie ($p^{(1)} = 1$) un sistema $|C|$, avente *tutti* i sistemi successivi aggiunti, in numero infinito. E tanto basta per affermare che la superficie appartiene ancora alla *prima* famiglia. Arriviamo così al teorema seguente:

Se il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie è superiore a zero, la superficie appartiene alla prima famiglia; vale a dire, sopra di essa la operazione di aggiunzione può applicarsi senza limite. In modo più preciso:

a) *se $p^{(1)} > 1$, la superficie ammette il sistema i.canonico per ogni valore di i superiore ad un certo limite* (ed è $P_i > 0$);

b) *se $p^{(1)} = 1$, la superficie può ammettere il sistema i.canonico (per i assai alto); e questo sistema, dato che esista, o possiede una sola curva* ($P_i = 1$), *od ha la curva generica composta di più curve ellittiche variabili in un fascio. Ma l'esistenza del sistema i.canonico, non può esser affermata a priori.* E si può ammettere che esistano superficie con $p^{(1)} = 1$, prive di sistemi pluricanonici ($P_i = 0$ per ogni valore di i), sebbene nessun esempio di siffatte superficie sia noto sinora.

Fatta eccezione per quest'ultimo caso, di ciascuno dei tipi di superficie nominati qui sopra si posseggono esempi.

8. Viceversa, *ogni superficie della prima famiglia ha il genere lineare $p^{(1)} \geqq 1$.* Si giustifica questa affermazione ricordando anzitutto che, sopra una superficie della prima famiglia, la relazione (3), ossia $n \leqq 2\pi - 2$, è verificata da ogni sistema lineare di curve appartenente alla superficie; ed è pur verificata (n. 5) la relazione $\pi \leqq \pi'$. Se adunque si considera un sistema $|C|$ di genere π, e si formano i successivi aggiunti $|C'|, |C''| \ldots$, di generi $\pi', \pi'' \ldots$, si può scrivere la catena, composta di infiniti termini:

$$(7) \qquad \pi \leqq \pi' \leqq \pi'' \leqq \ldots$$

Insieme alle relazioni (7) ci giova, per dimostrare il nostro teorema, scrivere un'altra serie di disuguaglianze, a cui arriveremo colla seguente considerazione. Alla espressione della variabile ω, che noi abbiamo scritto sinora sotto la forma (2), si può dare un altro aspetto notevole, purchè il valore di ω si calcoli, non più coi caratteri del sistema $|C|$ scelto ad arbitrio sulla superficie, bensì coi caratteri del sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$. Notando che $|C'|$ ha il grado $n' = \pi + \pi' - 2$ ed il genere π', noi deduciamo subito dalla (2) la formola

$$\omega - 1 = (\pi - \pi') - (\pi' - \pi''), \tag{8}$$

formola valida per una superficie qualsiasi, e feconda di risultati.

Ora, tornando al nostro teorema, ammettiamo, se è possibile, che una superficie della prima famiglia abbia $p^{(1)} \leqq 0$. Poichè per definizione è $\omega \leqq p^{(1)}$, risulta dalla (8)

$$\pi - \pi' < \pi' - \pi'' < \pi'' - \pi''' < \ldots;$$

e questa serie di disuguaglianze tra numeri interi ci dice che le differenze tra i generi di due sistemi aggiunti successivi, da un certo termine in poi, sono positive. Ma ciò è in contraddizione colle (7). E tanto basta per giustificare il teorema sopra enunciato.

9. Le superficie di genere lineare $p^{(1)} \leqq 0$, di cui dobbiamo ancora occuparci, sono dunque le superficie della *seconda* famiglia, sulle quali ogni sistema di curve ha un numero *finito* di successivi aggiunti. Ora sopra una superficie della seconda famiglia, oltre a sistemi di curve soddisfacenti alla relazione (3), vi sono pure sistemi soddisfacenti alla relazione opposta

$$n > 2\pi - 2 \tag{9}$$

(od alla equivalente $\pi > \pi'$). Con questi ultimi sistemi noi dobbiamo calcolare i valori della espressione ω data dalla (2), o dalla (8); e dobbiamo dimostrare che tra i nuovi valori di ω così ottenuti, vi è pure un *massimo* finito. Ora il procedimento che ci ha condotto a determinare il massimo $p^{(1)}$ di ω relativo ai sistemi soddisfacenti alla (3), e che consisteva nell'esaminare se il sistema $|i\,C'|$ contenesse il sistema $|i\,C|$, non si applica più quando il sistema $|C|$ soddisfa alla (9). Qui invece conviene esaminare se il sistema $|i\,C|$ possa contenere il sistema $|iC'|$. Ma per maggiore semplicità ci limiteremo al caso $i = 1$. Si riconosce subito che il sistema $|C|$ contiene il sistema $|C'|$ (sotto la ipotesi (9)) se

$$p_n + \omega - 1 \geqq 0; \tag{10}$$

ed il primo membro della (10) fissa un limite inferiore alla dimensione del sistema $|C - C'|$. Ora si dimostra che la curva generica dell'ultimo sistema, supposto esistente, ha il genere 1. D'altronde è noto che una superficie, la

quale contenga un sistema lineare, almeno ∞^2, di curve ellittiche, può trasformarsi birazionalmente in un piano o in una rigata ellittica. E poichè su queste due superficie si può determinare direttamente il massimo valore di ω (rispett. 10 ed 1), così si conclude:

Se coi caratteri dei sistemi lineari di curve che appartengono ad una data superficie, e soddisfano alla relazione

$$n > 2\pi - 2, \tag{9}$$

si calcola la espressione

$$\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1), \tag{2}$$

si ottengono infiniti valori di ω, i quali ammettono un massimo finito.

Questo massimo ci dà un nuovo invariante della superficie, che noi chiameremo *genere lineare secondario*, ed indicheremo con $\mathfrak{p}^{(1)}$. Esso, a differenza del genere lineare *principale* $p^{(1)}$, va considerato soltanto sopra una parte delle superficie algebriche, e precisamente sulle superficie della seconda famiglia ($p^{(1)} \leqq 0$); infatti la relazione (9) non può verificarsi sopra le altre superficie.

Avuto riguardo ai valori di $\mathfrak{p}^{(1)}$, le superficie della seconda famiglia si possono suddividere in due categorie:

a) superficie per cui $\mathfrak{p}^{(1)} > 1$;

b) superficie per cui $\mathfrak{p}^{(1)} \leqq 1$.

Cerchiamo di determinare i caratteri salienti delle due categorie.

10. Ci occuperemo anzitutto della seconda categoria, poichè qui riusciremo ad esaurire la ricerca.

Noi supponiamo adunque che la superficie su cui ragioniamo abbia il carattere $p^{(1)} \leqq 0$, ed il carattere $\mathfrak{p}^{(1)} \leqq 1$. Ricordando che il valore variabile ω, funzione del sistema di curve che si fissa sulla superficie, non può superare per definizione il maggiore dei due numeri $p^{(1)}$ e $\mathfrak{p}^{(1)}$, concludiamo che sulla nostra superficie è sempre $\omega \leqq 1$. Quindi se indichiamo con $|C|$ un sistema lineare qualsiasi di curve sulla superficie, e formiamo la serie (certo *limitata*, poichè $p^{(1)} \leqq 0$) dei successivi aggiunti $|C'|, |C''|, \ldots, |C^{(i)}|$, tra i generi $\pi, \pi', \pi'', \ldots, \pi^{(i)}$ dei sistemi così introdotti, passano le relazioni, conseguenze della (8),

$$\pi - \pi' \leqq \pi' - \pi'' \leqq \ldots \leqq \pi^{(i-1)} - \pi^{(i)} \tag{11}$$

Ora poichè la nostra superficie appartiene alla seconda famiglia, si può sempre supporre di aver scelto il sistema $|C|$ in guisa che sia $\pi > \pi'$; anzi la scelta di $|C|$ può farsi in modo, che la differenza $\pi - \pi'$ superi un numero D grande assegnato ad arbitrio

$$\pi - \pi' > D,$$

giacchè si soddisfa a tale condizione, sostituendo, ove occorra, al sistema primitivo un suo multiplo abbastanza elevato. Segue ora dalla (11)

$$\pi^{(i-1)} - \pi^{(i)} > D. \tag{12}$$

D'altra parte, essendo $|C^{(i)}|$ il sistema aggiunto a $|C^{(i-1)}|$, che ha il genere $\pi^{(i-1)}$, la dimensione $r^{(i)}$ di $|C^{(i)}|$ sarà espressa da

$$r^{(i)} = \pi^{(i-1)} - 1 - \delta,$$

dove δ soddisfa alle disuguaglianze

$$0 \leqq \delta \leqq -p_n;$$

(per la superficie che stiamo considerando è $p_n \leqq 0$). E così la (12) può scriversi sotto la forma

$$r^{(i)} - \pi^{(i)} > D', \tag{13}$$

indicando con D' un numero che si può prendere grande ad arbitrio, purchè si determini convenientemente il sistema $|C|$.

Consideriamo ora il sistema $|C^{(i)}|$, col quale, secondo la nostra ipotesi, si arresta la operazione di aggiunzione applicata a $|C|$ tante volte, quanto era possibile. Poichè $|C^{(i)}|$ non possiede sistema aggiunto, deve essere

$$\pi^{(i)} \leqq -p_n.$$

Ma vanno ancora distinti due casi, secondo che $|C^{(i)}|$ è irriducibile, o riducibile.

Occupiamoci anzitutto del primo caso. Si può supporre di aver scelto nella (13) D' così grande ($D' > -3\,p_n + 6$), che risulti

$$r^{(i)} > 3\,\pi^{(i)} + 6.$$

Ma un teorema del sig. Enriques [1] ci dice che, se tra la dimensione $r^{(i)}$ ed il genere $\pi^{(i)}$ di un sistema di curve passa una siffatta disuguaglianza, la superficie contiene un fascio di curve razionali, e può anzi trasformarsi birazionalmente in una rigata. Così questo primo caso è completamente esaurito.

Veniamo ora al secondo caso. Se $|C^{(i)}|$ è riducibile, la sua curva generica si spezza, o in una parte fissa e in una parte variabile, o in più (almeno $r^{(i)}$) parti variabili in un fascio. Ma la prima ipotesi si discute collo stesso ragionamento fatto nel caso del sistema irriducibile. Nella seconda ipotesi si osservi che l'insieme di $r^{(i)}$ (o più) curve di quel fascio deve dare, secondo la (13), una curva composta di genere $\pi^{(i)} < r^{(i)}$; ciò esige che la curva generica del fascio sia razionale od ellittica; ma dei due nuovi casi l'ultimo

[1] *Sulla massima dimensione...*, Atti dell'Acc. d. Sc. di Torino, vol. 29.

si esclude con un ragionamento minuzioso, sul quale non possiamo qui dilungarci. Così si ritorna nuovamente al caso del fascio di curve razionali. Arriviamo dunque al seguente risultato:

Se il genere lineare secondario di una superficie ha il valore

$$\mathfrak{p}^{(1)} \leqq 1$$

(*ed è quindi* $p^{(1)} \leqq 0$), *la superficie contiene un fascio di curve razionali, e può trasformarsi per conseguenza in una rigata o in una superficie con* ∞^1 *coniche.*

Inversamente, un calcolo diretto mostra che se una superficie contiene ∞^1 curve razionali (che possono supporsi rette o coniche), formanti un fascio di genere $p > 0$, il genere lineare secondario della superficie vale

$$\mathfrak{p}^{(1)} = -8(p-1)+1 \leqq 1.$$

11. Così rimangono da considerare soltanto le superficie per cui $\mathfrak{p}^{(1)} > 1$. Un esempio di siffatte superficie è offerto intanto dal piano, ossia dalle superficie razionali. Infatti si trova direttamente che per il piano è

$$\mathfrak{p}^{(1)} = 10 \quad (\text{e } p^{(1)} = 0).$$

Ma potranno esistere altre superficie aventi il carattere $\mathfrak{p}^{(1)} > 1$?

Di siffatte superficie non si conosce finora nessun esempio. Però sarebbe arrischiato l'affermare che non esistono; e per poter fare qualche previsione in proposito, si deve attendere che vengano risolute alcune questioni strettamente connesse coll'argomento. Accenniamole brevemente.

Si dimostra che una superficie contenente infinite curve razionali, tali che per ogni punto passi più di una curva, ha il carattere $\mathfrak{p}^{(1)} > 1$. Ora ogni superficie razionale ha la proprietà enunciata; ma all'infuori delle superficie razionali, esisteranno altre superficie aventi la stessa proprietà?

Alla domanda stessa si riduce la questione che segue. Consideriamo una superficie rigata irrazionale Φ, ed una seconda superficie F, i cui punti abbiano coordinate esprimibili razionalmente mediante le coordinate dei punti di Φ. Allora ad ogni punto di Φ corrisponde un punto di F; ma ad ogni punto di F possono corrispondere uno o più punti di Φ. Nell'ultima ipotesi, che cosa possiamo dire della F? Si vede subito che la F contiene ∞^1 curve razionali; se queste formano un fascio ricadiamo nel tipo delle superficie rigate. Ma se quelle curve non formano un fascio, ci troviamo nella categoria di superficie sopra considerate ($\mathfrak{p}^{(1)} > 1$); la F dovrà essere razionale? In altri termini: sopra una rigata irrazionale Φ può esistere una involuzione, la quale non sia riferibile birazionalmente nè ad una rigata, nè ad un piano? Non sappiamo ancora rispondere alla domanda.

Una ultima questione. Se una superficie ammette una serie continua di trasformazioni birazionali in sè, serie la quale (mediante moltiplicazione) dia

luogo ad un gruppo transitivo dipendente da *infiniti* parametri, la superficie contiene infinite curve razionali. A parte il caso che le dette curve formino un fascio di genere 1, ricadiamo nelle superficie aventi $p^{(1)} > 1$. Ora si domanda: all'infuori delle superficie razionali, e delle rigate ellittiche, esistono altre superficie possedenti un tal gruppo infinito di trasformazioni birazionali?

Anche l'ultima importante questione, sulla quale i sigg. Picard e Painlevé hanno recentemente richiamato l'attenzione dei geometri, aspetta ancora una risposta.

Matematica. — *Sul determinante Wronskiano.* Nota di G. Peano, presentata dal Corrispondente S. Pincherle.

Siano $x_1 x_2 \dots x_n$ funzioni reali d'una variabile reale t. Se fra esse passa la relazione

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0 ,$$

ove $c_1 c_2 \dots c_n$ sono costanti non tutte nulle, è noto che il Wronskiano, cioè il determinante formato colle x, Dx, D^2x, ... $D^{n-1}x$ è identicamente nullo.

La proposizione inversa, contrariamente ad un'opinione diffusa, richiede qualche restrizione. Invero, se le funzioni sono semplicemente due, x ed y, per dedurre dall'equazione

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

che il rapporto di x ad y è costante, si suol dividere per xy, e poi integrare; si dovrà perciò supporre mai nulle le funzioni x ed y. Si potrebbe dividere per y^2, o per $x^2 + y^2$, e si dimostra la proposizione, supposta mai nulla la funzione y, ovvero rispettivamente che non esista alcun valore della variabile che annulli ad un tempo x ed y.

Che l'inversa della proposizione citata non sussista senz'altro, risulta dall'esempio [1]

$$x = t^2 \qquad y = t \bmod t ,$$

ove il determinante Wronskiano è sempre nullo, mentre il rapporto x/y vale $+1$ o -1 secondochè t è positivo o negativo.

Lo scopo di questa Nota è di enunciare e dimostrare il seguente

Teorema. « Se per tutti i valori della variabile t appartenenti ad un certo intervallo, il Wronskiano delle funzioni $x_1 x_2 \dots x_n$ è nullo, *ma non esiste alcun valore di t, nell'intervallo considerato, che annulli tutti i*

[1] Diedi quest'esempio nel Mathesis, a. 1889, pag. 110.