# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV

1897

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME VI.**

1° SEMESTRE


ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

luogo ad un gruppo transitivo dipendente da *infiniti* parametri, la superficie contiene infinite curve razionali. A parte il caso che le dette curve formino un fascio di genere 1, ricadiamo nelle superficie aventi $p^{(1)} > 1$. Ora si domanda: all'infuori delle superficie razionali, e delle rigate ellittiche, esistono altre superficie possedenti un tal gruppo infinito di trasformazioni birazionali?

Anche l'ultima importante questione, sulla quale i sigg. Picard e Painlevé hanno recentemente richiamato l'attenzione dei geometri, aspetta ancora una risposta.

**Matematica.** — *Sul determinante Wronskiano.* Nota di G. Peano, presentata dal Corrispondente S. Pincherle.

Siano $x_1\, x_2 \ldots x_n$ funzioni reali d'una variabile reale $t$. Se fra esse passa la relazione

$$c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_n\, x_n = 0\,,$$

ove $c_1\, c_2 \ldots c_n$ sono costanti non tutte nulle, è noto che il Wronskiano, cioè il determinante formato colle $x$, $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}^2x$, ... $\mathrm{D}^{n-1}x$ è identicamente nullo.

La proposizione inversa, contrariamente ad un'opinione diffusa, richiede qualche restrizione. Invero, se le funzioni sono semplicemente due, $x$ ed $y$, per dedurre dall'equazione

$$x\, dy - y\, dx = 0$$

che il rapporto di $x$ ad $y$ è costante, si suol dividere per $xy$, e poi integrare; si dovrà perciò supporre mai nulle le funzioni $x$ ed $y$. Si potrebbe dividere per $y^2$, o per $x^2 + y^2$, e si dimostra la proposizione, supposta mai nulla la funzione $y$, ovvero rispettivamente che non esista alcun valore della variabile che annulli ad un tempo $x$ ed $y$.

Che l'inversa della proposizione citata non sussista senz'altro, risulta dall'esempio (¹)

$$x = t^2 \qquad y = t \bmod t\,,$$

ove il determinante Wronskiano è sempre nullo, mentre il rapporto $x/y$ vale $+1$ o $-1$ secondochè $t$ è positivo o negativo.

Lo scopo di questa Nota è di enunciare e dimostrare il seguente

*Teorema.* « Se per tutti i valori della variabile $t$ appartenenti ad un certo intervallo, il Wronskiano delle funzioni $x_1\, x_2 \ldots x_n$ è nullo, *ma non esiste alcun valore di* $t$, *nell'intervallo considerato, che annulli tutti i*

(¹) Diedi quest'esempio nel Mathesis, a. 1889, pag. 110.

*suddeterminanti dell' ultima orizzontale*, allora fra le funzioni considerate passa una relazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, non tutti nulli ».

Facendo uso dei numeri complessi d' ordine $n$, e dei prodotti alternati, di Grassmann, la proposizione si può enunciare coi simboli di Logica, e dimostrare facilmente. L' intervallo entro cui varia la variabile indipendente si può supporre, senza ledere alla generalità, che sia l' intervallo da 0 ad 1, indicato nel Formulaire col simbolo $\theta$. Il prodotto alternato dei numeri complessi $x, y, \ldots z$, in numero $\leq n$, si indica con $[x \,.\, y \,.\, \ldots \,.\, z]$; e se il numero dei fattori è $n$, esso è il determinante formato cogli elementi di questi complessi. E allora la proposizione si enuncia

$$x \,\varepsilon\, \mathrm{q}_n \mathrm{f}\theta : t \,\varepsilon\, \theta \,.\, \supset_t .\, [x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-1}x]_t = 0 \,.\, [x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x]_t \sim = 0 : \supset .$$

$$\exists\, \mathrm{q}_n (\sim \iota 0)\, \overline{c\varepsilon}\, [t \,\varepsilon\, \theta \,.\, \supset_t .\, \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} (c_i\, x_i)_t = 0 \,.$$

« Sia $x$ un numero complesso d' ordine $n$, funzione definita d' una variabile nell' intervallo $\theta$; e suppongasi che per ogni valore di $t$ il determinante Wronskiano sia nullo, ma sia diversa da zero la matrice formata colle $n-1$ prime orizzontali. Allora esiste un numero complesso d' ordine $n$, differente da zero, e tale che $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$ ».

Infatti pongasi $m = \mathrm{mod}\, [x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x]$, cioè chiamisi $m$ la radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti minori dell' ultima orizzontale; e si consideri il complesso

$$c = \frac{1}{m} [x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x]$$

esso è un complesso d' ordine $n$, finito, perchè per ipotesi il divisore $m$ non è nullo; $c$ non è nullo, poichè il suo modulo è 1. La somma $\sum c_i x_i$ vale $\frac{1}{m}[x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x \,.\, x]$ che è nulla, perchè due fattori sono identici. Resta a riconoscere che $c$ è costante; e basta perciò calcolare la derivata. Dispongo il calcolo come segue: dalla definizione di $c$ risulta

$$[x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x] = mc$$

derivo:

$$[x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-3}x \,.\, \mathrm{D}^{n-1}x] = (\mathrm{D}m)\, c + m\, \mathrm{D}c \,.$$

Faccio il prodotto regressivo dei due membri. Il termine con $\mathrm{D}m$ si annulla e si ha:

$$[x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-3}x \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x \,.\, \mathrm{D}^{n-1}x] \,.\, [x \,.\, \mathrm{D}x \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{D}^{n-2}x] = m^2 [c \,.\, \mathrm{D}c]$$

e siccome il Wronskiano è nullo, si ricava

$$[c \,.\, \mathrm{D}c] = 0$$

d'altra parte, essendo $c^2 = 1$, si ricava $c|\mathrm{D}c = 0$. Ora l'identità

$$(c^2)(\mathrm{D}c)^2 = [c\,.\,\mathrm{D}c]^2 + [c|\mathrm{D}c]^2$$

tenendo conto dell'annullarsi dei due termini del secondo membro, dà $(\mathrm{D}c)^2 = 0$, onde $c =$ costante.

Si ha così una condizione sotto cui si può invertire la proposizione sui Wronskiani. Sarebbe interessante trovarne delle altre, a causa dell'importanza di questi determinanti in Analisi.

## Geodesia. — *Sulla teoria delle proiezioni quantitative.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio V. Cerruti.

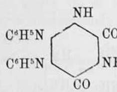
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## Chimica. — *Azione dell' idrazodicarbonamide sul solfato di idrazina.* Nota di A. Purgotti [1], presentata dal Socio Cannizzaro [2].

È noto come Pinner [3] dapprima per azione della fenilidrazina sull'urea, ottenesse una sostanza triazotata, che chiamò fenilurazolo e che appartiene, come lo mostrò in seguito il prof. Pellizzari nei suoi bei lavori sull'urazolo, alla serie del triazolo.

Lo stesso fenilurazolo fu ottenuto poi da Skinner e Ruhemann [4] per azione del biureto sulla fenilidrazina; e Pinner [5] che ottenne anche l'orto ed il paratolilurazolo, nella stessa Memoria a pag. 1225 dice, che per il riscaldamento della fenilsemicarbazide a 160° si ha sviluppo di ammoniaca ed una sostanza a cui spetta la composizione di $C^7H^6N^2O$.

Ritornando sullo stesso argomento [6], alla sostanza $C^7H^6N^2O$ assegna una formola doppia dandole la seguente costituzione




e chiamandola difenilurazina.

[1] Presentata nella seduta del 5 giugno 1897.
[2] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Pavia.
[3] Ber. 20, 2358.
[4] " " 3372.
[5] " 21, 1219.
[6] Ber. 21, 2329.