ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 gennaio 1897.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine* [1]. Nota del Socio U. DINI.

25. Un' altra formola importante si ottiene quando si prende il contorno s formato da linee che si determinano in modo speciale dipendentemente dai coefficienti a, b, c dei termini del 2° ordine nei polinomii F(U) e G(V).

Si osservi perciò che il valore di $\mathrm{L}\,ds$ quando a $\frac{\partial x}{\partial p}$ e $\frac{\partial y}{\partial p}$ si sostituiscano $-\frac{\partial y}{\partial s}$ e $\frac{\partial x}{\partial s}$, può scriversi sotto le due forme seguenti:

$$\mathrm{L}\,ds = \mathrm{V}\left\{-a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dy + (c\,dx - 2b\,dy)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + b\,d\mathrm{U}\right\} + \mathrm{UG}_3(\mathrm{V})\,ds\,,$$

$$\mathrm{L}\,ds = \mathrm{V}\left\{-(a\,dy - 2b\,dx)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + c\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dx - b\,d\mathrm{U}\right\} + \mathrm{UG}_3(\mathrm{V})\,ds\,,$$

avendo posto per abbreviare:

$$(72)\quad \mathrm{G}_3(\mathrm{V}) = \left\{\frac{\partial(a\mathrm{V})}{\partial x} + \frac{\partial(b\mathrm{V})}{\partial y} - 2d\,\mathrm{V}\right\}\frac{dy}{ds} - \left\{\frac{\partial(b\mathrm{V})}{\partial x} + \frac{\partial(c\mathrm{V})}{\partial y} - 2e\,\mathrm{V}\right\}\frac{dx}{ds} =$$
$$= \left\{\mathrm{G}_1(\mathrm{V}) - \frac{\partial(b\mathrm{V})}{\partial y}\right\}\frac{\partial y}{\partial s} - \left\{\mathrm{G}_2(\mathrm{V}) - \frac{\partial(b\mathrm{V})}{\partial x}\right\}\frac{dx}{ds}\,,$$

con $\mathrm{G}_1(\mathrm{V})$ e $\mathrm{G}_2(\mathrm{V})$ date dalle (69); e i differenziali essendo presi sul contorno.

[1] V. pag. 5.

Ora, evidentemente, quando sul contorno non sia $dx = 0$, o $dy = 0$, i primi due termini dei moltiplicatori di V in queste espressioni di Lds possono scriversi respettivamente:

$$-a\frac{dy}{dx}\frac{\partial U}{\partial x}dx + \left(c\frac{\partial x}{\partial y} - 2b\right)\frac{\partial U}{\partial y}dy\,, \quad -\left(a\frac{dy}{dx} - 2b\right)\frac{\partial U}{\partial x}dx + c\frac{dx}{dy}\frac{\partial U}{\partial y}dy\,;$$

quindi se le linee del contorno potranno essere scelte in modo che per esse siano sempre uguali fra loro i coefficienti di $\frac{\partial U}{\partial x}dx$ e $\frac{\partial U}{\partial y}dy$ nella prima o nella seconda di queste espressioni, allora ponendo pel primo caso $\frac{\partial y}{\partial x} = \lambda_1$, e pel secondo $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_2}$, avremo su alcune delle linee del contorno:

$$(73)\qquad \begin{cases} \mathrm{L}\,ds = \mathrm{V}(b - a\lambda_1)\,d\mathrm{U} + \mathrm{U}\mathrm{G}_3(\mathrm{V})\,ds\,, \\ \text{e sulle altre:} \\ \mathrm{L}\,ds = \mathrm{V}(c\lambda_2 - b)\,d\mathrm{U} + \mathrm{U}\mathrm{G}_3(\mathrm{V})\,ds\,, \end{cases}$$

con $-a\lambda_1 = \frac{c}{\lambda_1} - 2b\,,\quad c\lambda_2 = -\frac{a}{\lambda_2} + 2b$; per modo che λ_1 e $\frac{1}{\lambda_2}$ saranno le due radici della equazione di 2° grado:

$$a\lambda^2 - 2b\,\lambda + c\lambda = 0\,.$$

Ne segue che le linee del contorno faranno parte del sistema di linee:

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0\,,$$

che sono le caratteristiche delle equazioni a derivate parziali $\mathrm{F}(\mathrm{U}) = 0$, o $\mathrm{G}(\mathrm{V}) = 0$; dunque evidentemente dovremo limitarci al caso in cui queste caratteristiche sono reali, ciò che richiederà che a, b, c siano scelte in modo che si abbia $ac - b^2 < 0$, se si vorrà che le linee stesse (λ_1) e (λ_2), oltre essere reali, siano anche distinte fra loro.

Questi risultati poi varranno anche sulle porzioni del contorno per le quali si abbia $dx = 0$ $(\lambda_2 = 0)$, o $dy = 0$ $(\lambda_1 = 0)$, purchè sulle porzioni stesse corrispondenti sia contemporaneamente $a = 0$, o $c = 0$, senza di che per quelle porzioni per le quali fosse $dx = 0$ si avrebbe invece:

$$\mathrm{L}\,ds = -\,b\mathrm{V}\,d\mathrm{U} - a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dy + \mathrm{U}\mathrm{G}_3(\mathrm{V})\,ds\,,$$

e per quelle per le quali fosse $dy = 0$ si avrebbe:

$$\mathrm{L}\,ds = b\mathrm{V}\,d\mathrm{U} + c\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dx + \mathrm{U}\mathrm{G}_3(\mathrm{V})\,ds\,.$$

Ciò premesso, si supponga che le dette caratteristiche siano appunto reali e differenti, almeno in una porzione del campo C che si considera, e si prenda il contorno s formato da due linee del sistema λ_1, e da due del sistema λ_2, ammettendo che questo sia possibile; e analogamente a quanto si fece nel paragrafo precedente, indichiamo con A, B, C, D i quattro vertici del quadrilatero (ordinariamente curvilineo) così formato, e con (ξ, η) le coordinate del vertice C; e ammettiamo che le linee AB e CD appartengano al sistema (λ_1), mentre le due BC e DA apparterranno al sistema (λ_2).

Ponendo allora $\sqrt{b^2 - ac} = \Delta$, e intendendo che sia preso $\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a}$, si troverà subito con calcoli facili:

$$(74)\qquad \int L\,ds = -2\left\{(\Delta UV)_A - (\Delta UV)_B + (\Delta UV)_C - (\Delta UV)_D\right\} +$$
$$+ \int_{AB} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(b - a\lambda_1)V}{\partial s}\right\} ds + \int_{BC} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(c\lambda_2 - b)V}{\partial s}\right\} ds +$$
$$+ \int_{CD} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(b - a\lambda_1)V}{\partial s}\right\} ds + \int_{DA} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(c\lambda_2 - b)V}{\partial s}\right\} ds,$$

e quindi sostituendo nella formula (58) avremo la seguente:

$$(75)\ 2(\Delta UV)_{\xi,\eta} = 2\left\{(\Delta UV)_B + (\Delta UV)_D - (\Delta UV)_A\right\} - \iint \left\{UG(V) - VP(U)\right\} dx\,dy +$$
$$+ \int_{AB} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(b - a\lambda_1)V}{\partial s}\right\} ds + \int_{BC} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(c\lambda_2 - b)V}{\partial s}\right\} ds +$$
$$+ \int_{CD} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(b - a\lambda_1)V}{\partial s}\right\} ds + \int_{DA} U\left\{G_3(V) - \frac{\partial(c\lambda_2 - b)V}{\partial s}\right\} ds$$

che varrà al solito sia per qualsiasi funzione U regolare entro il quadrilatero A B C D, sia soltanto per gli integrali della solita equazione $\Phi = 0$, secondochè sarà fatto $P(U) = F(U)$ o $P(U) = F(U) - \Phi$; e anche questa potrà servire a determinare il valore di U in un punto qualsiasi $C(\xi, \varphi)$, che potremo supporre variabile, in funzione dei valori di U su due caratteristiche λ_1, λ_2, e di altri elementi che figurano nelle formole stesse.

Merita poi di essere notato espressamente che qui si suppone che le linee del contorno si trovino in regioni del piano nelle quali $ac - b^2 < 0$, ma non si esclude che in alcuni punti, linee o porzioni superficiali nell' interno del quadrilatero A B C D possa questa condizione non essere sempre soddisfatta, purchè però i coefficienti a, b, c, d, e, e le funzioni U, V, Φ si mantengano sempre regolari nel campo stesso C.

Ed è pure degno di nota che negli integrali semplici della formola precedente la funzione U non ci comparisce che coi suoi valori al contorno; il che concorda pienamente con alcuni risultati generali ottenuti dal Du Bois Reymond pel caso che in tutto C sia soddisfatta la condizione $ac - b^2 < 0$; come la formola stessa pel caso degli integrali delle equazioni della forma $s + ap + bq + cz = 0$ concorda con quella che fu data per lo stesso caso dal Du Bois Reymond e da altri, e che risulta pure dalla (70).

26. Accennando ora brevemente anche al caso in cui, avendosi $ac - b^2 = 0$, le due caratteristiche si confondono in una sola, osserveremo che allora, supposto ad es. a diverso da zero, dalle formole (54) o (55) avremo sempre:

$$(76)\quad \mathrm{L}ds = \frac{1}{a}\left(-a\,dy + b\,dx\right)\left\{a\left(\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right) + b\left(\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)\right\} + \\ + \left\{\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2d\right)dy - \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - 2e\right)dx\right\}\mathrm{UV}\,,$$

e sulle linee caratteristiche $dy = \frac{b}{a}\,dx$ avremo:

$$(77)\qquad \mathrm{L}ds = \left\{\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2d\right)dy - \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - 2e\right)dx\right\}\mathrm{UV}\,;$$

talchè su queste linee in L non compariranno più le derivate di U nè quelle di V; e quindi se il contorno s sarà composto in parte di queste linee, allora nelle formole corrispondenti a questo caso l' integrale $\int \mathrm{L}ds$ non conterrà le derivate di U o quelle di V in quelle parti nelle quali è esteso a linee caratteristiche, e le conterrà per le altre parti. Queste ultime poi potranno essere scelte in modo che restino soddisfatte altre condizioni speciali, come potrà sempre scegliersi la funzione V in modo che su queste parti del contorno vengano ad es. a restarci soltanto i termini che contengono le derivate della funzione U, ecc.

Non fermandoci più oltre sulle formole che abbiamo dato in queste Note, nè su questi varî casi, dovremmo ora passare ad applicare le formole stesse alla effettiva determinazione degli integrali delle equazioni a derivate parziali del second' ordine nei punti di un campo C, quando sono date condizioni speciali al contorno; ma per la natura di queste applicazioni e perchè esse hanno una certa estensione, meglio si conviene farne un lavoro completo a parte; e questo farò appunto in una Memoria che pubblicherò separatamente.

Fisica. — *Dell'azione dell'ozonatore sui gas attivati dai raggi X.* Nota del Socio E. VILLARI (1).

Effetto del riscaldamento. — Ancora si potè abbreviare la durata dell' attività residua dell' ozonatore scaricandolo per via del riscaldamento, che praticai in due modi differenti.

In una esperienza preliminare attivai l' ozonatore per 6′, e quindi spingendo, al solito modo, il gas luce Xato ottenni che

E perdè	1°	in	17′ 40″
	5°		20′ 48″
	10°		23′ 4″

(1) V. pag. 17.