ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

	α apparente	δ apparente
1896 Dic. 22, $6^h\ 2^m\ 52^s$ R. C. R.	$2^h\ 23^m\ 8^s\ 56$ (9.383n)	$+1^\circ\ 36'\ 34''\ 9$ (0.757)
» Dic. 27, 6 37 28 »	2 52 35 25 (9.301n)	+0 28 17 0 (0.766)
» Dic. 30, 6 26 54 »	3 8 38 24 (9.352n)	−0 1 10 1 (0.769)

I primi saggi d'orbita, che già possediamo, accennano alla probabilità che la cometa possa appartenere al gruppo delle periodiche a corto periodo; già l'inclinazione sull'eclittica è piccola e il moto è diretto, tuttavia conviene attendere nuovi calcoli per pronunziarsi. La cometa, nella prima settimana di dicembre, fu da noi distante appena 0,33; tuttavia fu scoperta come un oggetto telescopico, con nucleo di 8:va di grandezza e con una piccolissima coda.

Matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine.* Nota del Socio U. Dini.

19. Applicheremo le formole precedenti specialmente alla integrazione delle equazioni (48) nel caso in cui mancano del termine $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2$; ma per questo giova prima dedurre altre formole generali da quelle che già abbiamo dato.

Ci serviremo perciò ancora delle notazioni F(U) e G(V) per rappresentare i polinomii (49) e (50); e avendo bisogno di tenere nei calcoli F(U) e G(V) senza richiedere, come ordinariamente si fà, che siano contemporaneamente soddisfatte le equazioni $F(U)=0$, $G(V)=0$, delle quali, la seconda, come già ricordammo, si dice allora la equazione aggiunta della prima, chiameremo d'ora innanzi per analogia G(V) *il polinomio aggiunto* di F(U).

Con queste notazioni per F(U) e G(V), e coll'altra per L:

$$(54)\quad L=\left(a\frac{\partial x}{\partial p}+b\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\left(b\frac{\partial x}{\partial p}+c\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(V\frac{\partial U}{\partial y}-U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+ \\ +\left\{\left(2d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p}+\left(2e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p}\right\}UV,$$

ovvero:

$$(55)\quad L=\left\{\left(a\frac{\partial x}{\partial p}+b\frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{\partial U}{\partial x}+\left(b\frac{\partial x}{\partial p}+c\frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{\partial U}{\partial y}\right\}V- \\ -\left\{\left(a\frac{\partial x}{\partial p}+b\frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\left(b\frac{\partial x}{\partial p}+c\frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{\partial V}{\partial y}\right\}U+ \\ +\left\{\left(2d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial p}+\left\{\left(2e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\right\}UV,$$

la (46), dopo soppressivi i termini provenienti dal termine g_0 e dai binomio $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2$, cioè facendovi $h=g_0=0$, potrà scriversi:

$$(56)\qquad -\iint \mathrm{V}\,\mathrm{F(U)}\,dx\,dy+\iint \mathrm{UG(V)}\,dx\,dy=\int \mathrm{L}\,ds,$$

e varrà qualunque siano le funzioni U, V, a, b... purchè regolari in tutto C (il contorno incl.); e in L al posto di $\frac{\partial x}{\partial p}$ e $\frac{\partial y}{\partial p}$ potremo sempre quando si voglia sostituire $-\frac{\partial y}{\partial s}$, e $\frac{\partial x}{\partial s}$.

Questa, quando si supponga che U sia un integrale della equazione $\mathrm{F(U)}=0$, ritorna la (52) pel caso di $h=g_0=0$; più generalmente poi, se si suppone che U sia un integrale regolare entro C della equazione generale del second'ordine:

$$\Phi\left(x, y, \mathrm{U}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}\right)=0,$$

con Φ funzione, regolare al solito ma qualsiasi, di x, y, U, $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$... la stessa (56) darà luogo all'altra:

$$(57)\qquad -\iint \mathrm{V}\left\{\mathrm{F(U)}-\Phi\right\}dx\,dy+\iint \mathrm{UG(V)}\,dx\,dy=\int \mathrm{L}\,ds,$$

che varrà per ogni integrale U della equazione precedente $\Phi=0$ regolare entro C; e se la funzione V che qui figura oltre essere regolare anch'essa entro C (il contorno inclus.) non sarà zero in nessuna porzione superficiale per quanto piccola di C, allora inversamente « ogni funzione U regolare in C « (il cont. inclus.) che soddisfi a questa equazione (57) per qualunque por- « zione anche arbitrariamente piccola di C sarà un integrale della equa- « zione $\Phi=0$ ».

Avendosi infatti la (56) e la (57) insieme, ne verrà sempre l'altra $\iint_{c_1} \mathrm{V}\Phi\,dx\,dy=0$ per qualunque porzione c_1, comunque piccola, di C, e se $\mathrm{M}(x_1, y_1)$, sarà un punto qualunque interno a C o sul contorno, in esso per quel valore di U dovrà essere $\Phi=0$, altrimenti se in quel punto fosse $\Phi=\lambda$, con λ diverso da zero, a causa della continuità esisterebbe un intorno c di M nel quale Φ sarebbe diverso da zero e del medesimo segno di λ, e allora se V in M non fosse zero prendendo in c un altro intorno c_1 sufficientemente piccolo di M, il prodotto $\mathrm{V}\Phi$ in tutto c_1 sarebbe diverso da zero e dello stesso segno, e l'equazione $\iint_{c_1} \mathrm{V}\Phi\,dx\,dy=0$ non sarebbe soddisfatta. E se V in M fosse zero, in alcuni punti m_1, m_2... di c comunque vicini ad M, nè V nè λ sarebbero zero perchè V non è zero in nessuna porzione superficiale di C, e allora col ragionamento precedente si troverebbe che la equazione $\iint V\Phi \, dx \, dy = 0$ non sussisterebbe per intorni sufficientemente piccoli dei punti $m_1, m_2, \ldots$ contenuti in c.

Segue da ciò evidentemente che scrivendo la formola:

$$(58) \qquad \iint \left\{ UG(V) - VP(U) \right\} dx \, dy = \int L \, ds ,$$

dove G(V) e L sono dati dalle (50) e (54) o (55), si può affermare che questa formola varrà sia per qualsiasi funzione U regolare entro C (il contorno inclus.), sia soltanto per gl' integrali U della equazione $\Phi = 0$ regolari essi pure entro C (il cont. incl.), secondochè sarà $P(U) = F(U)$, o $P(U) = F(U) - \Phi$, e lo stesso naturalmente avverrà delle formole che si dedurranno da queste; e così avremo formole che corrisponderanno a proprietà degli integrali delle equazioni a derivate parziali di second' ordine $\Phi = 0$, e anche varranno per la integrazione di questa almeno in casi speciali; e ciò sia partendo da un contorno s dato qualsiasi, sia partendo da contorni speciali che vengano scelti convenientemente in dipendenza della equazione stessa che si considera $\Phi = 0$.

20. Ciò premesso, senza presupporre nulla ora rispetto al contorno s di C, indichiamo con $M(x_1, y_1)$ un punto qualsiasi interno a C, e supponiamo che V sia una funzione sempre regolare in C, fuori che nel punto (x_1, y_1) dove ammetteremo che abbia una singolarità proveniente dalla presenza di un termine logaritmico $\log \varphi$, essendo φ una funzione regolare in ogni intorno del punto M e zero in questo punto.

La formola (58) non sarà allora applicabile altro che quando si escluda il punto M con un piccolo campo c di forma qualsiasi il cui contorno sia s_1 e non passi per M, e quindi perchè sia valida dovremo intendere che l'integrale doppio del primo membro sia esteso al campo $C - c$, e che da quello semplice del secondo membro ne sia tolto uno simile esteso al contorno s_1 di c percorso nel senso diretto, e colle normali volte allora verso l' interno di c, per modo che si avrà ora:

$$(59) \qquad \iint_{C-c} \left\{ UG(V) - VP(U) \right\} dx \, dy = \int_s L \, ds - \int_{s_1} L \, ds_1 .$$

Supponendo ora che nell' intorno di C si abbia:

$$V = A \log \varphi + B ,$$

con A, B, φ funzioni regolari nell' intorno stesso, sarà:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A'_x \log \varphi + A \frac{\varphi'_x}{\varphi} + B'_x , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = A'_y \log \varphi + A \frac{\varphi'_y}{\varphi} + B'_y ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = A''_{x,x} \log \varphi + 2A'_x \frac{\varphi'_x}{\varphi} + A \frac{\varphi''_{x,x} \varphi - \varphi'^2_x}{\varphi^2} + B''_{x,x} ,$$

. . . .

ove cogli apici abbiamo indicato le derivate parziali di A, B, φ; e siccome A, B, φ sono regolari in tutto un intorno c_1 di M che possiamo supporre che comprenda nel suo interno l'intorno c, così è certo che esse e le loro derivate si comporranno di gruppi di termini omogenei in $x - x_1$, e $y - y_1$; e in φ mancherà sempre il termine di grado zero perchè φ deve annullarsi in M, per modo che indicando con φ_s questi gruppi omogenei di φ di grado s avremo:

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{n+1} + \varphi_{n+2} \cdots$$

con $n \geq 1$. E se nell'intorno di M introdurremo le coordinate polari ϱ, θ colle formole $x - x_1 = \varrho \cos\theta$, $y - y_1 = \varrho \operatorname{sen}\theta$, con che $dx\,dy = \varrho\, d\varrho\, d\theta$, $\frac{\varphi}{\varrho^n}$ sarà sempre finito entro c, e inoltre non si accosterà mai a zero più di una certa quantità data se φ_n, come supporremo, non si annullerà altro che in M, ciò che porterà ora anche la condizione che essa debba essere una forma definita di grado pari $n \geq 2$.

Prendendo ora a studiare l'integrale del primo membro della (59), osserviamo che onde essere certi che esso all'impiccolire in un modo qualsiasi di c abbia un limite, che allora sarà l'integrale stesso esteso nuovamente all'intero campo C, bisognerà assicurarsi che dato un numero comunque piccolo σ esiste un campo c_1 tale che per qualsiasi altro campo c_2 interno a c_1 e il cui contorno non passi per M, l'integrale stesso esteso alle porzioni comprese fra c_2 e c_1 è inferiore a σ; e evidentemente se, spezzandolo in più integrali nel modo che occorrerà, intenderemo ridotti positivi i loro elementi, basterà considerare invece del campo compreso fra c_2 e c_1 quello c' compreso fra i cerchi di centro M e di raggi r_2 e r_1, essendo r_2 la minima distanza dei punti di c_2 da M, e r_1 la massima distanza dei punti di c_1 pure da M.

Così, avuto riguardo al modo di composizione del polinomio aggiunto G(V) e ai valori dati sopra per le derivate di V, si vedrà subito che tutti i termini del primo membro della (59) all'impiccolire di c tenderanno verso gli integrali corrispondenti estesi all'intiero campo C, salvo per quelli provenienti dai termini $A\,\frac{\varphi''_{x,x}\,\varphi - \varphi_x'^2}{\varrho^2}$, ... che a calcoli fatti avranno ancora il denominatore ϱ, a meno che A non manchi del termine di grado zero in $x - x_1$, e $y - y_1$, cioè sia zero nel punto M, nel qual caso evidentemente non si avranno eccezioni neppure per questi termini.

Fuori di questo caso, cioè quando A non sia zero nel punto M, aggruppando insieme questi termini, si vede che essi differiranno tanto poco quanto si vuole dall'unico:

$$A_1 U_1 \iint \left(a_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial x^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial x\, \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial y^2} \right) dx\, dy\,,$$

dove con A_1, U_1, a_1, b_1, c_1 sono indicati i valori di A, U, a, b, c nel punto M; e indipendentemente dal valore U_1 di U; questo termine sparirà senz'altro se la quantità fra parentesi sarà zero; dunque si può intanto evidentemente asserire che se per φ_n sarà presa una forma definita di grado $n \geq 2$ di $x - x_1$, $y - y_1$, e tale che la somma:

$$a_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial x^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial x \, \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial y^2}$$

sia identicamente nulla, l'integrale del primo membro della formola (59) coll'impiccolire in qualsiasi modo di c avrà per limite l'integrale stesso esteso all'intero campo C; e lo stesso per quanto abbiamo detto, avverrà anche se φ_n non soddisfarà a questa condizione quando A si annullerà nel punto M.

Quanto poi agli integrali che figurano nel secondo membro della (59), sarà da considerarsi soltanto quello esteso al contorno s_1 del campo c; e poichè ora per le considerazioni precedenti potremo prendere s_1 circolare senz'altro e di raggio r, con chè su esso si avrà $d s_1 = r \, d\theta$, così è evidente che se A sarà zero nel punto M l'integrale stesso avrà per limite lo zero e non occorreranno considerazioni speciali; mentre se A non sarà zero in M allora bisognerà spezzarlo in varii integrali, e fermarsi a considerare quelli relativi ai termini che contengono $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial V}{\partial y}$; nè occorrerà tenere conto degli altri perchè saranno arbitrariamente piccoli.

Questi integrali poi, avendo riguardo ai valori dati sopra di $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, e $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ e all'essere $\dfrac{\partial x}{\partial p} = -\dfrac{\partial (x - x_1)}{\partial r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial p} = -\dfrac{\partial (y - y_1)}{\partial r}$, si vede che a meno di quantità arbitrariamente piccole si riducono al seguente:

$$-A_1 U_1 \int_0^{2\pi} \left[(a_1 \cos\theta + b_1 \operatorname{sen}\theta) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (b_1 \cos\theta + c_1 \operatorname{sen}\theta) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] \frac{r d\theta}{\varphi_n},$$

o anche all'altro:

$$-A_1 U_1 \int_0^{2\pi} \left[\Big(a_1 (x - x_1) + b_1 (y - y_1) \Big) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \right.$$
$$\left. \Big(b_1 (x - x_1) + c_1 (y - y_1) \Big) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] \frac{d\theta}{\varphi_n},$$

il quale, per essere $(x - x_1) \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (y - y_1) \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y} = n \, \varphi_n$, potrà anche scriversi:

$$-A_1 U_1 \left\{ 2n\pi a_1 + \int_0^{2\pi} \left[b_1 \left((x - x_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + (y - y_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + (c_1 - a_1)(y - y_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] \frac{d\theta}{\varphi_n} \right\},$$

e sarà zero sempre quando lo sia A_1; dunque si può ora evidentemente concludere che « se essendo $M(x_1, y_1)$ un punto *interno* a C si prende:

$$V = A \log \varphi + B, \tag{60}$$

« dove A, e B sono funzioni regolari qualsiansi entro C (il contorno incl.) « e φ è anch'essa regolare in C, e oltre a ciò si annulla nel punto M, e « nell' intorno di M si può scomporre in una somma di gruppi $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$ « di termini omogenei dei gradi $n, n+1, \ldots$ in $x - x_1$, $y - y_1$, il primo « dei quali φ_n è una forma definita di grado $n \geq 2$ e tale che per esso « si ha:

$$a_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial x^2} + 2 b_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial x \partial y} + c_1 \frac{\partial^2 \log \varphi_n}{\partial y^2} = 0, \tag{61}$$

« allora si avrà la formola seguente:

$$\begin{aligned} \text{(62)}\quad & A_1 U_1 \left\{ 2n\pi a_1 + \int_0^{2\pi} \left[b_1 \left((y - y_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (x - x_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) + \right.\right. \\ & \left.\left. + (c_1 - a_1)(y - y_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] \frac{d\theta}{\varphi_n} \right\} = - \iint \left\{ UG(V) - VP(U) \right\} dx\, dy + \int L ds, \end{aligned}$$

« dove L è dato dalle (54) o (55), e A_1, U_1, a_1, b_1, c_1 sono i valori di « A, U, a, b, c nel punto $M(x_1, y_1)$, e la funzione $P(U)$ corrisponde, secondo « i casi, a $F(U)$ o a $F(U) - \Phi$ ».

« E se la funzione A si annullerà nel punto M, allora non vi sarà « bisogno di porre per φ_n la condizione di soddisfare alla equazione (61), « e la formola precedente sussisterà ancora, ma si ridurrà alla (58) stessa, « la quale resta così dimostrata anche nel caso in cui V in un punto « $M(x_1, y_1)$ interno a C abbia una singolarità logaritmica tale che la stessa « funzione V si possa porre sotto la forma (60) con A funzione regolare « che si annulla nel punto stesso M ».

Questa formola (62) quando i coefficienti di U_1 nel primo membro sono diversi da zero, darà il valore della funzione U nel punto $M(x_1, y_1)$ espresso per gli elementi che figurano nel secondo membro, e varrà per qualsiasi funzione U regolare entro C se vi sarà posto $P(U) = F(U)$, mentre varrà soltanto per gli integrali regolari della equazione:

$$\Phi\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{63}$$

se vi sarà posto $P(U) = F(U) - \Phi$. In ogni modo esprimerà una proprietà di qualsiasi funzione U regolare in C o degli integrali regolari della (63), e varrà ad esprimere queste quantità per quelli fra i loro elementi che siano dati al contorno quando, profittando delle funzioni indeterminate che vi figurano o della arbitrarietà che si ha nel contorno, si potrà fare in modo che non vi restino altro che gli elementi dati stessi; e noi tenendo conto appunto di questo, faremo poi di quella formola interessanti applicazioni.

21. Il punto $M(x_1, y_1)$ da noi considerato finora era supposto interno al campo C. Se esso invece è sul contorno, occorrono considerazioni che differiscono leggermente dalle precedenti.

In questo caso potremo intendere escluso lo stesso punto M togliendo da C un campo c piccolo ad arbitrio limitato da due porzioni piccolissime ε_1, ε_2 di s dalle due parti di M e da una curva s_1 interna a C pure piccolissima; e invece della formola (59) avremo l'altra:

$$(64) \qquad \iint_{C-c} \left\{ UG(V) - VP(U) \right\} dx\, dy = \int_{s-\varepsilon_1-\varepsilon_2} L\, ds + \int_{s_1} L\, ds .$$

Ora prendendo ancora V sotto la forma (60) con $\varphi = \varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots$, e $n \geq 1$, non importerà più porre la condizione che φ_n nelle vicinanze di M non si annulli in nessun punto fuori che in M, ma solo basterà richiedere che, fuori che in questo punto M, essa non si annulli *in nessun altro punto interno di c, nè sul contorno*, per modo che in tutto c il $\frac{\varphi_n}{\varrho^n}$ sia sempre discosto da zero più di un certo numero; in altri termini non verrà ora escluso che φ_n possa annullarsi anche nelle vicinanze di M *ma fuori del campo c*, e potrà quindi essere anche $n = 1$.

Con queste condizioni però e coll' altra data dalla (61), ma questa però pel caso soltanto che A non sia zero nel punto M, basterà ripetere i ragionamenti fatti pel caso precedente per vedere subito che all' integrale doppio del primo membro della formola (66) potremo ancora sostituire quello esteso a C all' infuori di quantità arbitrariamente piccole, e s_1 potrà supporsi circolare senz' altro.

Ciò supposto, se s' indica con θ_1 l' angolo che la tangente a M nella direzione degli archi s decrescenti (raggio iniziale di s_1) fa coll' asse della x, e con $\theta_1 - \gamma$ quello della tangente dall' altra parte di M (raggio finale di s_1), per modo che γ venga ad essere l' angolo delle due direzioni delle tangenti al contorno in M fra le quali cade il campo C, coi ragionamenti stessi del paragrafo precedente si vedrà subito che se in M la funzione A sarà zero, l' integrale $\int_{s_1} L\, ds$ tenderà a zero certamente coll' impiccolire di s_1, e l' integrale $\int_{s-\varepsilon_1-\varepsilon_2} L\, ds$ tenderà verso l' altro $\int_s L\, ds$ il quale verrà così ad avere un significato; mentre, se A non sarà zero in M, o, il che è lo stesso, se A_1 non sarà zero, la parte dell' integrale $\int_{s_1} L\, ds_1$ che giova di considerare si ridurrà alla seguente:

$$A_1 U_1 \left\{ n \gamma a_1 - \int_{\theta_1}^{\theta_1-\gamma} \left[b_1 \left((y - y_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (x - x_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (c_1 - a_1)(y - y_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] \frac{d\theta}{\varphi_n} \right\};$$

ma allora per l' integrale $\int_{s-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \mathrm{L}\, ds$ del secondo membro della (64) che pure, sotto le condizioni poste, avrà un limite, non potrà dirsi che questo limite sia l'integrale $\int_s \mathrm{L}\, ds$, perchè, avendo supposto che s_1 sia circolare, ε_1 e ε_2 non sono più indipendenti, e sono invece uguali fra loro.

Ne segue che « se A si annullerà nel punto M del contorno la formola (58) continuerà ancora a sussistere senz' altro ; se poi A non si annullerà in M allora la formola (64) darà luogo all' altra:

$$
(65) \quad \mathrm{A}_1 \mathrm{U}_1 \left\{ n\gamma a_1 - \int_{\theta_1}^{\theta_1-\gamma} \left[b_1 \left((y-y_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (x-x_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + (c_1 - a_1)(y-y_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] \frac{d\theta}{\varphi_n} \right\} = \iint \left\{ \mathrm{UG(V)} - \mathrm{VP(U)} \right\} dx\, dy - \lim_{\substack{\varepsilon_1=0 \\ \varepsilon_2=0}} \int_{s-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \mathrm{L}\, ds\,,
$$

« quando φ_n soddisfi alla condizione (61) e non si annulli in C altro che nel punto M » ; ma se si vorrà all' ultimo termine sostituire l' integrale $\int_s \mathrm{L}\, ds$ bisognerà assicurarsi che questo ha un significato.

Osservando al solito che la parte di questo integrale nell' intorno di M che può dare luogo a singolarità è soltanto quella che proviene dai termini che contengono $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ e $\frac{d\mathrm{V}}{dy}$, si riscontra subito che le indagini devono riportarsi sulla quantità:

$$
\left\{ \left(a_1 \frac{\partial x}{\partial p} + b_1 \frac{\partial y}{\partial p} \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \left(b_1 \frac{\partial x}{\partial p} + c_1 \frac{\partial y}{\partial p} \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right\} \frac{ds}{\varphi_n}\,,
$$

ovvero sulla corrispondente:

$$
\frac{1}{\varphi_n} \left\{ \left(-a_1\, dy + b_1\, dx \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \left(-b_1\, dy + c_1\, dx \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right\},
$$

negli stessi intorni di M , comunque scelti ma arbitrariamente piccoli ; quindi evidentemente la indicata sostituzione dell' integrale $\int_s \mathrm{L}\, ds$ all' ultimo termine della (65) potrà farsi soltanto quando il contorno s o la funzione φ_n siano tali che le quantità precedenti negli intorni sufficientemente piccoli di M sopra il contorno siano uguali a zero senz' altro, o almeno i loro integrali estesi a porzioni comunque piccole del contorno dalle due parti di M siano arbitrariamente piccoli.

In particolare, dunque, la cosa potrà farsi indipendentemente dal valore di φ_n quando il contorno sia tale che su esso si abbiano le due:

$$
-a_1\, dy + b_1\, dx = 0\,, \quad -b_1\, dy + c_1\, dx = 0\,,
$$

o dipendentemente da φ_n quando si abbiano le altre:

$$a_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + b_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = 0 \quad , \quad b_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + c_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = 0 \, ,$$

sulle tangenti al contorno dalle due parti di M, o più generalmente quando, si abbia la equazione:

$$\left(a_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + b_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) dy - \left(b_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + c_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) dx = 0 \, ,$$

in piccole porzioni del contorno dalle due parti di M.

22. Nelle formole dei due paragrafi precedenti avendo voluto conservare la maggiore generalità possibile nelle funzioni U e V, compatibilmente colle condizioni speciali che si avevano per esse, è stato poi necessario introdurre altre condizioni per ottenere le formole (62) o (65).

Se noi però ammettiamo che V, pure avendo una singolarità nel punto $M(x_1, y_1)$ che supporremo p. es. interno al campo C, in tutto il rimanente del campo soddisfi alla solita condizione di essere regolare ecc., e inoltre sia un integrale della equazione aggiunta $G(V) = 0$ della $F(U) = 0$, allora avremo sempre la formola (59), ma nell'integrale doppio del primo membro mancherà senz'altro il termine $UG(V)$ che era quello appunto che portava le difficoltà, e si vedrà subito che l'integrale rimanente $\iint\limits_{C-c} VP(U) dx\, dy$ coll'impiccolire del campo c tenderà verso l'integrale $\iint\limits_{C} VP(U) dx\, dy$ se l'ordine d'infinito di V nel punto M per l'introduzione delle solite coordinate polari non risulterà superiore a quello di $\frac{\tau(\varrho)}{\varrho}$, dove $\tau(\varrho)$ diviene infinitesimo con ϱ; e sotto la stessa condizione prendendo ancora s_1 circolare si troverà che nell'integrale $\int_{s_1} L ds_1$ del secondo membro tenderà a zero la parte che non contiene la derivata di V.

Se poi la quantità:

$$\left\{ a(x - x_1) + b(y - y_1) \right\} \frac{\partial V}{\partial x} + \left\{ b(x - x_1) + c(y - y_1) \right\} \frac{\partial V}{\partial y} \tag{66}$$

col tendere del punto (x, y) verso il punto M avrà un limite determinato e finito α_0, allora l'altra parte di $\int_{s_1} L ds_1$ tenderà verso $2\pi\alpha_0 \, U_1$; quindi si può anche evidentemente affermare che « se, senza richiedere ora che V sia « della forma (60), si saprà che essa è un integrale della equazione ag- « giunta $G(V) = 0$ della $F(U) = 0$ che, pure avendo una singolarità nel punto « $M(x_1 , y_1)$ interno a C, ivi colla introduzione delle coordinate polari (ϱ, θ)

« risulterà di un ordine d'infinito non superiore a quello di $\frac{\tau(\varrho)}{\varrho}$, dove $\tau(\varrho)$ « diviene infinitesimo con ϱ; e se la quantità (66) avvicinandosi il punto « (x, y) in qualsiasi modo al punto M ha un limite determinato e finito α_0, « avremo la formola:

$$(67) \qquad 2\pi\,\alpha_0 U_1 = \iint VP(U)dx\,dy + \int L ds,$$

« che corrisponde alla (62) pel caso appunto di $G(V) = 0$, e nella quale U « sarà ancora una funzione regolare qualsiasi in U se $P(U) = F(U)$, e sarà « un integrale della equazione (63) se $P(U) = F(U) - \Phi$ ».

Una estensione simile della formola (65), sempre pel caso di $G(V) = 0$, si avrebbe anche se il punto M fosse sul contorno di C.

23. Si comprende come tutte queste formole, a causa della arbitrarietà delle funzioni $a, b, c \ldots$, e V o A, B, e φ che vi figurano, e anche di U quando non vi è la condizione che sia un integrale della equazione $\Phi = 0$, come a causa della arbitrarietà del contorno, daranno luogo a formole svariatissime.

Lasciando ad es., qualsiasi il contorno, e sempre intendendo che per le funzioni che si considerano siano soddisfatte le condizioni generali precedenti, cioè di essere regolari in C, ecc...., potremo dare avanti ad arbitrio la funzione U supponendo $P(U) = F(U)$, e potremo poi prendere come meglio vorremo la funzione V o le tre A, B, φ e il polinomio $F(U)$, determinando in corrispondenza il suo aggiunto $G(V)$; come senza dare avanti U, o dando soltanto l'equazione $\Phi = 0$ cui dovrà soddisfare U nel caso di $P(U) = F(U) - \Phi$, potremo scegliere V, o A, B, e φ in modo da soddisfare a date condizioni, p. es.: al contorno; e così otterremo altre formole particolari che potranno talvolta essere utili.

Invece potremo anche scegliere avanti il contorno s di C in modo speciale, e lasciare ancora tutte le altre quantità indeterminate o prenderle nel modo che più troveremo conveniente; o infine, volendo, potremo prendere il contorno non più arbitrariamente ma in modo che su esso siano soddisfatte certe condizioni speciali in dipendenza delle funzioni U o V, o in relazione ai coefficienti $a, b, c \ldots$ del polinomio scelto $F(U)$, per modo ad es: che i coefficienti $a\frac{\partial x}{\partial p} + b\frac{\partial y}{\partial p}$, $b\frac{\partial x}{\partial p} + c\frac{\partial y}{\partial p} \ldots$ che figurano nei valori (54) o (55) di L, sul contorno al quale si riferiscono $\frac{\partial x}{\partial p}$, e $\frac{\partial y}{\partial p}$ abbiano particolarità speciali date.

24. Ci tratterremo poi sui casi nei quali si hanno date condizioni nell'interno del campo C o al contorno per le funzioni che figurano nelle nostre formole. Per ora conserveremo tutta la generalità che si aveva nei paragrafi precedenti per le funzioni stesse, e tratteremo alcuni casi di contorni particolari.

Supponiamo ad es. dapprima che il contorno s del campo C sia un rettangolo coi lati paralleli agli assi x e y, e coi vertici nei punti $A(x_0, y_0)$, $B(\xi, y_0)$, $C(\xi, \eta)$, $D(x_0, \eta)$.

Sul lato AB avremo

$$\frac{\partial x}{\partial p} = 0\,,\ \frac{\partial y}{\partial p} = 1\,,\quad ds = dx\,;\ \text{sul lato BC}\ \frac{\partial x}{\partial p} = -1\,,\ \frac{\partial y}{\partial p} = 0\,, ds = dy\,;$$

$$\text{sul lato CD}\ \frac{\partial x}{\partial p} = 0\quad \frac{\partial y}{\partial p} = -1\,,\quad ds = -\,dx\,;$$

$$\text{e sul lato DA}\ \frac{\partial x}{\partial p} = 1\,,\quad \frac{\partial y}{\partial p} = 0\quad ds = -\,dy\,;$$

e quindi indicando con L_1, L_2, L_3, L_4 i valori di L su questi lati rispettivamente avremo:

$$\int L\,ds = \int_{x_0}^{\xi} (L_1 + L_3)\,dx + \int_{y_0}^{\eta} (L_2 + L_4)\,dy\,,$$

con:

$$L_1 = \left\{ b\,V \frac{\partial U}{\partial x} + c\,V \frac{\partial U}{\partial y} - U\left(-2\,e\,V + \frac{\partial (bV)}{\partial x} + \frac{\partial (cV)}{\partial y}\right)\right\}_{y_0},$$

$$L_2 = \left\{ -\,a\,V \frac{\partial U}{\partial x} - b\,V \frac{\partial U}{\partial y} + U\left(-2\,d\,V + \frac{\partial (aV)}{\partial x} + \frac{\partial (bV)}{\partial y}\right)\right\}_{\xi}$$

e similmente L_3 e L_4.

Ora, con integrazioni per parti si vede subito che dalla formola precedente nel primo integrale si eliminano i termini che contengono $\frac{\partial U}{\partial x}$, e nel secondo si eliminano quelli che contengono $\frac{\partial U}{\partial y}$; quindi a calcoli fatti avremo evidentemente la formola seguente:

$$(68)\quad \int L\,ds = -\,2\left\{(bUV)_A - (bUV)_B + (bUV)_C - (bUV)_D\right\} -$$
$$-\int_{x_0}^{\xi}\left\{\left[UG_2(V) - cV\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y_0} - \left[UG_2(V) - c\,V\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{\eta}\right\} dx +$$
$$+\int_{y_0}^{y}\left\{\left[UG_1(V) - aV\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{\xi} - \left[UG_1(V) - aV\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{x_0}\right\} dy\,,$$

dove nella prima parentesi del secondo membro figurano i valori di bUV nei quattro vertici del rettangolo, e si è posto per abbreviare:

$$(69)\ G_1(V) = \frac{\partial (aV)}{\partial x} + 2\,\frac{\partial (bV)}{\partial y} - 2\,V\,,\ G_2(V) = 2\,\frac{\partial (bV)}{\partial x} + \frac{\partial (cV)}{\partial y} - 2\,e\,V\,;$$

e ora sostituendo nella formola (58) questo valore di $\int L\,ds$ avremo la seguente:

$$(70)\quad 2(b\mathrm{UV})_{\xi,\eta} = 2\left\{(b\mathrm{UV})_{\mathrm{B}} + (b\mathrm{UV})_{\mathrm{D}} - (b\mathrm{UV})_{\mathrm{A}}\right\} -$$

$$-\iint\left\{\mathrm{UG(V)} - \mathrm{VP(U)}\right\} dx\, dy -$$

$$-\int_{x_0}^{\xi}\left\{\left[\mathrm{U\,G_2(V)} - c\,\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right\}_{y_0} - \left[\mathrm{UG_2(V)} - c\,\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right]_{\eta}\right\} dx +$$

$$+\int_{y_0}^{\eta}\left\{\left[\mathrm{U\,G_1(V)} - a\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right\}_{\xi} - \left[\mathrm{UG_1(V)} - a\,\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right]_{x_0}\right\} dy\,.$$

che pel caso particolare delle funzioni U che soddisfano alle equazioni dal tipo iperbolico ridotte alla forma $s + ap + bq + cz = 0$, trovasi già nei lavori di Riemann, Du-Bois Reymond, Darboux, ecc.... mentre come qui viene data varrà sia per qualsiasi funzione U regolare entro il rettangolo ABCD, sia soltanto per gli integrali della solita equazione generale $\Phi = 0$, secondo chè sarà $\mathrm{P(U)} = \mathrm{F(U)}$, $\mathrm{P(U)} = \mathrm{F(U)} - \Phi$. E quando b e V non siano zero nel punto C (ξ, η) questa formola darà il valore di U in questo punto C (che potremo anche supporre variabile) espresso pei valori di U sui lati AB e AD del rettangolo e per gli altri elementi che figurano nella formola stessa; e di questa osservazione ci varremo più oltre.

Sostituendo invece il valore (68) di $\int_s \mathrm{L}\, ds$ nella (62) si troverà l'altra:

$$(71)\mathrm{A_1U_1}\left\{2n\pi a_1 + \int_0^{2m}\left[b_1\left\{(y-y_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (x-x_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right\} + (c_1-a_1)(y-y_1)\frac{\partial \varphi_n}{\varphi_n}\right]\frac{d\theta}{\varphi_n}\right\} =$$

$$= -2\left\{(b\mathrm{UV})\,\mathrm{A} - (b\mathrm{UV})\,\mathrm{B} + (b\mathrm{UV})\,\mathrm{C} - (b\mathrm{UV})\,\mathrm{D}\right\} - \iint\left\{\mathrm{UG(V)} - \mathrm{VP(U)}\right\} dx dy -$$

$$-\int_{x_0}^{\xi}\left\{\left[\mathrm{UG_2(V)} - c\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right]_{y_0} - \left[\mathrm{UG_2(V)} - c\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right]_{\eta}\right\} dx +$$

$$+\int_{y_0}^{\eta}\left\{\left[\mathrm{UG_1(V)} - a\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right]_{\xi} - \left[\mathrm{UG_1(V)} - a\,\mathrm{V}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right]_{x_0}\right\} dy\,,$$

e formole simili si avrà dalle (65) e (67) sempre sotto le condizioni poste per φ_n nei respettivi casi. E anche questa formola potrà servire a determinare i valori delle funzioni U in un punto qualsiasi (x_1, y_1) in funzione di elementi dati al contorno, come pure mostreremo più oltre.