ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Ora la reazione di ossidazione si porta su tutti e due gli atomi di carbonio assimetrici e quindi si formano in egual quantità gli isomeri attivi in senso contrario, ossia i racemi, epperciò l'acido $C_8 H_{12} O_5$ che ne risulta dovrà essere inattivo, quantunque derivi da un composto attivo; e difatti la soluzione acquosa al 10 % di quest'acido ed il suo etere etilico sono completamente inattivi.

L'esperienza c'insegna adunque che si può spiegare in modo semplice e razionale la formazione dell'acido $C_8 H_{12} O_5$ ed i suoi derivati per blanda ossidazione dell'acido canforico, senza ricorrere a delle ipotetiche trasposizioni molecolari, solo quando si adotti per quest'ultimo la formola di costituzione proposta dal Bredt.

Geodesia. — *Sulla teoria delle proiezioni quantitative.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio V. Cerruti.

L'elemento lineare dell'ellissoide di rotazione terrestre, riferito alle coordinate geografiche $\varphi\,\theta$, è dato dalla formola

$$ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 ,$$

dove ϱ è il raggio di curvatura del meridiano, r il raggio del parallelo. L'elemento lineare del piano riferito ad un sistema di coordinate ortogonali isoterme uv, è espresso da

$$ds'^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) .$$

Si ottiene, come è noto, una rappresentazione quantitativa dell'ellissoide sul piano, stabilendo fra $u\,v\,\varphi\,\theta$ tali due relazioni o corrispondenze per cui si abbia

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{k\varrho r}{\lambda^2} , \tag{1}$$

nella quale la costante k rappresenta il *modulo di riduzione superficiale.*

Il *modulo di riduzione lineare* m della rappresentazione è dato dalla formola

$$m^2 = \frac{e}{\varrho^2}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + \frac{2f}{\varrho r}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \frac{g}{r^2}\cos^2\alpha , \tag{2}$$

dove α denota l'angolo che l'elemento lineare, spiccantesi da un punto qualunque dell'ellissoide, forma col parallelo passante per quel punto, mentre i coefficienti $e\,f\,g$ hanno le seguenti definizioni

$$e = \lambda^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2\right\} \quad f = \lambda^2\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \quad g = \lambda^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2\right\} .$$

Le due direzioni principali o, in altri termini, le due direzioni dell' ellissoide che si mantengono ortogonali nella rappresentazione, sono definite dai valori di α che annullano la derivata del secondo membro della (2), e sono quindi da ricavarsi dall' equazione

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\dfrac{2f}{\varrho r}}{\dfrac{g}{r^2} - \dfrac{e}{\varrho^2}} .$$

Se si vuole che in ogni punto dell' ellissoide le direzioni principali coincidano con quelle dei paralleli e dei meridiani, dovrà essere $f = 0$, ossia

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 . \tag{3}$$

Questa equazione, congiunta colla (1), definisce quindi le proiezioni quantitative nelle quali i paralleli ed i meridiani sono rappresentati da un doppio sistema di curve ortogonali. Tali proiezioni vennero già studiate da Korkine il quale fece dipendere il problema da una equazione alle derivate parziali del secondo ordine, della quale effettuò l' integrazione (1).

Qui ci proporremo il seguente problema, non contemplato nel lavoro di Korkine, ed al quale sarebbe difficile rispondere in base alle formole ivi stabilite: *Ricercare le proiezioni quantitative nelle quali i paralleli ed i meridiani sono rappresentati da due famiglie di linee ortogonali isoterme.*

Riferendo il piano ai parametri isometrici u e v di tali due famiglie di linee, le equazioni (1) e (3) dovranno essere soddisfatte quando vi si ponga

$$u = u(\varphi) \qquad v = v(\theta).$$

Con ciò la (3) risulterà identicamente soddisfatta, la (1) assumerà la forma

$$\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\theta} = \frac{k\varrho r}{\lambda^2} , \tag{4}$$

e questa non potrà essere soddisfatta se non nel caso in cui il secondo membro si riduca al prodotto di una funzione della sola φ per una funzione della sola θ o, ciò che è equivalente, se non nel caso in cui si abbia

$$\lambda^2 = f_1(u)\, f_2(v).$$

Perchè l' assunto sistema di curve ortogonali isoterme del piano sia atto a rappresentare i paralleli ed i meridiani in una proiezione quantitativa, occorre che l' elemento lineare, ad esso riferito, si presenti sotto la forma

$$ds'^2 = f_1(u)\, f_2(v)\,(du^2 + dv^2) .$$

(1) A. Korkine, *Sur les cartes géographiques*. Math. Ann., Bd. XXXV 1890.

Ora si ottengono tutti i sistemi ortogonali isotermi del piano ponendo

$$x + iy = \psi_1(u + iv) \qquad x - iy = \psi_2(u - iv)\ ,$$

indicandosi qui con ψ_2 ciò che diventa la funzione ψ_1 quando si cambi i in $-i$ non solo nell' argomento, ma anche, eventualmente, nei coefficienti della funzione. Differenziando le due relazioni e moltiplicandole si ottiene

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 = \psi_1'\,\psi_2'\,(du^2 + dv^2)\,.$$

La funzione ψ che determina il doppio sistema di linee dovrà dunque esser tale che si abbia

$$\psi_1'(u + iv)\,\psi_2'(u - iv) = f_1(u)\,f_2(v)\,.$$

Se si pone per semplicità

$$w_1 = u + iv \qquad w_2 = u - iv\,,$$

si prende il logaritmo dei due membri della relazione e si deriva una prima volta rispetto ad u ed una seconda rispetto a v, si ottiene

$$\frac{d^2}{dw_1^{\,2}} \log \psi_1'(w_1) = \frac{d^2}{dw_2^{\,2}} \log \psi_2'(w_2)\,.$$

Ma l' eguaglianza fra questi due rapporti, dipendenti da variabili diverse, non può sussistere a meno che entrambi non si riducano a una costante. Indicandola con $2\,\mathrm{C}$ e tralasciando gli indici, dovrà dunque aversi, in generale,

$$\frac{d^2}{dw^2} \log \psi'(w) = 2\,\mathrm{C}\,,$$

ed integrando

$$\psi(w) = \mathrm{A} \int e^{\mathrm{C}w^2 + \mathrm{C}'w} dw + \mathrm{B}\,.$$

I sistemi ortogonali isotermi del piano atti a rappresentare i paralleli ed i meridiani, in una proiezione quantitativa dell' ellissoide terrestre, sono dunque tutti e soli quelli definiti dalla relazione

(5) $$x \pm iy = \mathrm{A} \int e^{\mathrm{C}(u \pm iv)^2 + \mathrm{C}'(u \pm iv)}\, d(u \pm iv) + \mathrm{B}\,.$$

Di qui si ricava

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 = \mathrm{A}^2\, e^{2\mathrm{C}(u^2 - v^2) + 2\mathrm{C}'u}\,(du^2 + dv^2)\,,$$

e quindi la forma necessaria del coefficiente λ^2 sarà

$$\lambda^2 = \mathrm{A}^2\, e^{2u(\mathrm{C}u + \mathrm{C}')}\, e^{-2\mathrm{C}v^2}\,.$$

L' equazione differenziale (4) diverrà

$$\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\theta}=\frac{k\varrho r}{A^2 e^{2u(Cu+C')} e^{-2Cv^2}}$$

e potrà scindersi nelle due alle derivate parziali

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} e^{2u(Cu+C')}\frac{du}{d\varphi} &= A_1 k\varrho r \\ e^{-2Cv^2}\frac{dv}{d\theta} &= A_2 \end{aligned}\right. \qquad \left(A_1 A_2=\frac{1}{A^2}\right).$$

Se si suppone $C=C'=0$, la (5) diviene

$$x\pm iy=A(u\pm iv)+B.$$

I due sistemi di rette paralleli ai due assi ortogonali sono dunque atti a risolvere il problema proposto e le (6) dànno

$$u=A_1 k\int\varrho r\,d\varphi+B_1, \qquad v=A_2\theta+B_2$$

che sono le formole corrispondenti alle *proiezioni cilindriche quantitative* (1).

Supponendo nella (5) $C=0$ si ottiene

$$x\pm iy=\frac{A}{C'}e^{C'(u\pm iv)}+B,$$

ossia, ritenendo per semplicità $A=C'=1$, $B=0$

$$u\pm iv=\log(x\pm iy)$$

$$u=\log\sqrt{x^2+y^2}=\log R \qquad v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\Theta.$$

Le linee isoterme così definite, atte a fornire una nuova soluzione del problema, non sono altro che i cerchi $R=\text{cost}$ col centro nell' origine, ed i raggi $\Theta=\text{cost}$ uscenti dall' origine stessa. Le (6) diventano in questo caso

$$e^{2u}\frac{du}{d\varphi}=A_1 k\varrho r \qquad \frac{dv}{d\theta}=A_2 \qquad (A_1 A_2=1)$$

quindi, integrando, si ottiene

$$e^{2u}=2A_1 k\int\varrho r\,d\varphi+B_1, \qquad v=A_2\theta+B_2$$

ossia

$$R^2=2A_1 k\int\varrho r\,d\varphi+B_1, \qquad \Theta=A_2\theta+B_2$$

che sono le formole corrispondenti agli *sviluppi conici quantitativi* (2).

(1) Cfr. Matteo Fiorini, *Le proiezioni delle carte geografiche*. Bologna 1881, pag. 492.
(2) Op. cit., pag. 470.

Vano riuscirebbe il tentativo di risolvere il problema proposto cogli altri sistemi più usitati di coordinate curvilinee isoterme (coordinate ellittiche, sistema delle lemniscate e delle iperboli ortogonali ecc.) nessuno di essi rientrando nella relazione (5).

Le precedenti conclusioni, enunciate per l'ellissoide di rotazione terrestre, valgono invariate per ogni altra superficie di rotazione.

Fisica. — *Sulle cariche elettrostatiche generate dai raggi catodici* [1]. Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Una delle proprietà più caratteristiche dei raggi catodici, è quella di generare delle cariche elettriche sopra i corpi da essi colpiti. È infatti risaputo da chiunque abbia sperimentato con dei tubi di Crookes, che le pareti anticatodiche di questi si elettrizzano fortemente, quando essi sono in azione. Basta avvicinare un dito a quelle pareti, per trarne scintille lunghe parecchi millimetri. La lunghezza di queste scintille decresce considerevolmente e può anche annullarsi, deviando i raggi catodici mediante un magnete. Sembra dunque assai naturale attribuire a queste radiazioni, la formazione di quelle cariche elettriche.

Il fenomeno indicato è stato oggetto di studio da parte di molti fisici, specie dopo la notevole scoperta di Röntgen. Secondo l'ipotesi di Crookes, sulla natura dei raggi catodici, che cioè questi debbano essere costituiti da particelle materiali cariche di elettricità negativa, i corpi neutri colpiti da quei raggi, dovrebbero venire caricati negativamente. E difatti le esperienze eseguite da taluni fisici hanno confermato questa semplice supposizione. Così Wiedemann, Perrin, e recentemente McClelland. Ma risultato contrario fu ottenuto in alcune esperienze eseguite da non molto da Battelli e Garbasso, i quali trovano che i corpi colpiti dai raggi catodici si caricano *positivamente*.

Da qualche mese io ho intrapreso uno studio sulla *determinazione della velocità dei raggi catodici*; ed è mia intenzione di trovare il valore di questa velocità, servendomi appunto delle cariche elettriche generate sui corpi colpiti. Non è dunque oggetto questa Nota di conciliare le divergenze delle osservazioni dei varî fisici, ma solo di studiare il fenomeno accennato nelle condizioni in cui mi son posto, per fare la determinazione di cui più sopra ho detto. Dirò dunque ora di risultati che valgono esclusivamente per il caso in cui si sperimenti come verrà indicato, e dopo che in Note posteriori a questa, avrò detto dei risultati ottenuti nella ricerca della velocità dei raggi catodici, mi propongo di studiare definitivamente la questione delle cariche elettriche generate da quei raggi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.