ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Matematica. — *Sopra alcuni invarianti puntuali delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.* Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio V. Cerruti.

Gli invarianti puntuali per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine si determinano [1] nel modo seguente: si estende la trasformazione infinitesima generica:

$$(1) \qquad \delta x = \alpha(xyz)\,\delta t \qquad \delta y = \beta(xyz)\,\delta t \qquad \delta z = \gamma(xyz)\,\delta t$$

alle derivate p, q, r, s, t, cioè si calcolano le variazioni $\delta p, \delta q, \delta r, \delta s, \delta t$; nelle espressioni che così si ottengono entrano, oltre x, y, z, le quantità p, q, r, s, t.

Imaginiamo ora di avere la equazione alle derivate parziali del secondo ordine sotto la forma:

$$r - F(x\,y\,z\,p\,q\,s\,t) = 0\,;$$

per comodo conveniamo di rappresentare le derivate con indici in basso, cioè poniamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x, \ldots \frac{\partial F}{\partial t} = F_t, \ldots$$

Si calcolano $\delta F_x, \ldots \delta F_t$, osservando che

$$\delta d F = d \delta F,$$

quindi:

$$d\delta F = F_x\,\delta dx + \cdots + F_t\,\delta dt + \delta F_x . dx + \cdots + \delta F_t . dt\,.$$

da cui:

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta F_x = \dfrac{\partial \delta F}{\partial x} - F_x \dfrac{\partial \delta x}{\partial x} - \cdots - F_t \dfrac{\partial \delta t}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta F_t = \dfrac{\partial \delta F}{\partial t} - F_x \dfrac{\partial \delta x}{\partial t} - \cdots - F_t \dfrac{\partial \delta t}{\partial t}\,. \end{cases}$$

Così si ottengono le espressioni di $\delta F_x \ldots \delta F_t$ in funzione di $x, y, z, p, q, F, s, t, F_x, \ldots F_t$. Bisognerebbe poi formarsi le espressioni sempre più complicate di $\delta F_{xx} \ldots \delta F_{tt}, \delta F_{xxx}, \ldots$ fino al punto in cui il numero delle variazioni calcolate supera il numero delle derivate di α, β, γ che si vengono col calcolo introducendo. Ciò avviene, come si riconosce subito, per le derivate terze della F; il calcolo, anche degli invarianti più semplici, si pre-

[1] Lie, *Ueber Differentialinvarianten.* Math. Ann. Bd. 24.

senta dunque molto complicato; questa forse è la ragione per cui nessuno si è accinto ad esso.

Più semplice assai del problema generale è questa ricerca più limitata:

determinare gli invarianti che contengono soltanto le derivate di F *rispetto* s *e* t.

In questa Nota ed in quelle che la seguiranno mi propongo appunto di studiare questa classe di invarianti.

1. Partendo dalle relazioni

$$\begin{aligned} dx &= p\,dx + q\,dy \\ dp &= r\,dx + s\,dy \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned}$$

che devono rimanere invarianti, e con le regole del calcolo delle variazioni, si determinano le variazioni di p, q, r, s, t per la trasformazione (1). Ponendo, se f è una funzione di x, y, z:

$$\begin{aligned} (f_x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} \\ (f_y) &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} \\ (f_{xx}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + r\frac{\partial f}{\partial z} \\ (f_{xy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + pq\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + s\frac{\partial f}{\partial z} \\ (f_{yy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2q\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + q^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + t\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

si trova [1]:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta p &= (\gamma_x) - p(\alpha_x) - q(\beta_x) \\ \delta q &= (\gamma_y) - p(\alpha_y) - q(\beta_y) \\ \delta F = \delta r &= (\gamma_{xx}) - p(\alpha_{xx}) - q(\beta_{xx}) - 2F.(\alpha_x) - 2s(\beta_x) \\ \delta s &= (\gamma_{xy}) - p(\alpha_{xy}) - q(\beta_{xy}) - F(\alpha_y) - s(\beta_y) - s(\alpha_x) - t(\beta_x) \\ \delta t &= (\gamma_{yy}) - p(\alpha_{yy}) - q(\beta_{yy}) - 2s(\alpha_y) - 2t(\beta_y). \end{aligned} \right.$$

Poichè dunque nelle espressioni di $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q$, non entrano le quantità F, s, t, si ha dalle (2):

$$\begin{aligned} \delta F_s &= \frac{\partial \delta F}{\partial s} - F_s\frac{\partial \delta s}{\partial s} - F_t\frac{\partial \delta t}{\partial s} \\ \delta F_t &= \frac{\partial \delta F}{\partial t} - F_s\frac{\partial \delta s}{\partial t} - F_t\frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{aligned}$$

[1] Nelle espressioni delle variazioni ometto d'ora in poi, per brevità di scrittura, il fattore costante δt, non portando ciò nessun inconveniente — anzi facendone evitare.

Dalle (3) si ricava:

$$\frac{\partial \delta F}{\partial s} = \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial z} - p \frac{\partial \alpha}{\partial z} - q \frac{\partial \beta}{\partial z} - 2(\alpha_x) \right\} F_s - 2(\beta_x)$$

$$\frac{\partial \delta F}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial z} - p \frac{\partial \alpha}{\partial z} - q \frac{\partial \beta}{\partial z} - 2(\alpha_x) \right\} F_t$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial s} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} - p \frac{\partial \alpha}{\partial z} - q \frac{\partial \beta}{\partial z} - (\beta_y) - (\alpha_x) - (\alpha_y) F_s .$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = - (\alpha_y) F_t - (\beta_x)$$

$$\frac{\partial \delta t}{\partial s} = - 2(\alpha_y)$$

$$\frac{\partial \delta t}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} - p \frac{\partial \alpha}{\partial z} - q \frac{\partial \beta}{\partial z} - 2(\beta_y) .$$

Si ha dunque, sostituendo questi valori nelle espressioni per δF_s δF_t:

$$(4) \qquad \begin{cases} \delta F_s = (\alpha_y)(F_s^2 + 2F_t) + \{(\beta_y) - (\alpha_x)\} F_s - 2(\beta_x) \\ \delta F_t = (\alpha_y) F_s F_t + 2\{(\beta_y) - (\alpha_x)\} F_t + (\beta_x) F_s . \end{cases}$$

Nelle espressioni di δF_s, δF_t non entrano, come si vede, oltre le variabili x, y, z, p, q che le quantità F_s, F_t. Per le variazioni delle derivate di ordine superiore si verifica la circostanza analoga; ciò si dimostra per induzione ed osservando che se è $F^{(k)}$ una derivata di ordine k, ed $F_s^{(k)}$, $F_t^{(k)}$ le sue derivate rispetto s e t, si ha:

$$\delta F_s^{(k)} = \frac{\partial \delta F^{(k)}}{\partial s} - F_s^{(k)} \frac{\partial \delta s}{\partial s} - F_t^{(k)} \frac{\partial \delta t}{\partial s}$$

$$\delta F_t^{(k)} = \frac{\partial \delta F^{(k)}}{\partial t} - F_s^{(k)} \frac{\partial \delta s}{\partial t} - F_t^{(k)} \frac{\partial \delta t}{\partial t} .$$

Il fatto che le variazioni delle derivate di F prese rispetto s e t si esprimono in funzione, oltre che di x, y, z, p, q, delle derivate di F rispetto s e t, spiega e giustifica la limitazione che ci siamo imposta da principio nella ricerca degli invarianti. Calcoliamo ancora le variazioni delle derivate seconde. Si ha:

$$\delta F_{ss} = (\alpha_y)(3F_s F_{ss} + 4F_{st}) + \left\{ 2(\beta_y) - \frac{\partial \gamma}{\partial z} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + q \frac{\partial \beta}{\partial z} \right\} F_{ss}$$

$$\delta F_{st} = (\alpha_y)(2F_s F_{st} + 2F_{tt} + F_{ss} F_t) + \left\{ 3(\beta_y) - (\alpha_x) - \frac{\partial \gamma}{\partial z} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + q \frac{\partial \beta}{\partial z} \right\} F_{st} + (\beta_x) F_{ss}$$

$$\delta F_{tt} = (\alpha_y)(F_s F_{tt} + 2F_{st} F_t) \qquad + \left\{ 4(\beta_y) - 2(\alpha_x) - \frac{\partial \gamma}{\partial z} + p \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + q \frac{\partial \beta}{\partial z} \right\} F_{tt} + 2(\beta_x) F_{st} .$$

Poniamo ora:

$$(\alpha_y) = m_1\,,\ (\beta_x) = m_2\,,\ (\beta_y) - (\alpha_x) = m_3\,,\ 2(\beta_y) - \frac{\partial\gamma}{\partial z} + p\,\frac{\partial\alpha}{\partial z} + q\,\frac{\partial\beta}{\partial z} = m_4\,;$$

essendo α, β, γ, funzioni interamente arbitrarie, le m_1, m_2, m_3, m_4, sono anche esse quantità arbitrarie. Nelle variazioni che abbiamo fin qui calcolate entrano d'altra parte soltanto le dette quantità arbitrarie; se fosse

$$\varphi(F_s\,,\ F_t\,,\ F_{ss}\,,\ F_{st}\,,\ F_{tt})$$

un invariante, dovrebbe dunque essere $\delta\varphi = 0$ qualunque siano m_1, m_2, m_3, m_4. Esprimiamo questa condizione:

$$0 = \delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial F_s}\,\delta F_s + \frac{\partial\varphi}{\partial F_t}\,\delta F_t + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial F_{tt}}\,\delta F_{tt}\,.$$

Ponendo per δF_s, δF_t, ... δF_{tt} le loro espressioni ed eguagliando a zero i coefficienti di $m_1 \ldots m_4$, si hanno le quattro condizioni seguenti per φ:

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = X_1(\varphi) = (F_s^2 + 2F_t)\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_s} + F_s F_t\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_t} + (3F_s F_{ss} + 4F_{st})\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{ss}} + \\ \qquad + (2F_s F_{st} + 2F_{tt} + F_{ss} F_t)\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{st}} + (F_s F_{tt} + 2F_{st} F_t)\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{tt}} \\ 0 = X_2(\varphi) = -2\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_s} + F_s\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_t} + F_{ss}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{st}} + 2F_{st}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{tt}} \\ 0 = X_3(\varphi) = F_s\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_s} + 2F_t\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_t} + F_{st}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{st}} + 2F_{tt}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{tt}} \\ 0 = X_4(\varphi) = F_{ss}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{ss}} + F_{st}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{st}} + F_{tt}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_{tt}}\,. \end{cases}$$

Queste rappresentano anche le condizioni sufficienti perchè sia φ un invariante. In altre parole: un invariante si determina integrando il sistema completo (5) di quattro equazioni in cinque variabili.

Alla equazione $X_1 f = 0$ si può sostituire la equazione:

$$Yf = X_1 f + F_t X_2 f - F_s X_3 f - F_s X_4 f = 0\,.$$

Si ha:

$$Yf = (F_s F_{ss} + 2F_{st})\,\frac{\partial f}{\partial F_{ss}} + (F_{tt} + F_t F_{ss})\,\frac{\partial f}{\partial F_{st}} + (2F_t F_{st} - F_s F_{tt})\,\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione si determinano facilmente; esse sono:

$$F_s\,,\ F_t\,,\ \varpi_4 = F_t F_{ss} - F_s F_{st} - F_{tt}\,,\ \varpi_6 = F_{st}^2 - F_{ss} F_{tt}\,;$$

le soluzioni comuni di $Yf = 0$ ed $X_4 f = 0$ sono:

$$F_s \ , \ F_t \ , \ \frac{\varpi_6}{\varpi_4^2} \ ;$$

le soluzioni comuni ad $Yf = 0$, $X_4 f = 0$, $X_3 f = 0$ sono:

$$\frac{\varpi_6}{\varpi_4^2} F_s^2 \ , \ \frac{\varpi_6}{\varpi_4^2} F_t \ ;$$

e finalmente la soluzione del sistema (5) è:

$$A = \frac{\varpi_6 (F_s^2 + 4F_t)}{\varpi_4^2} \ ,$$

ossia, ponendo:

$$\varpi_2 = F_s^2 + 4F_t$$

$$A = \frac{\varpi_2 \varpi_6}{\varpi_4^2} \ . \tag{6}$$

Dunque:

l'invariante puntuale più semplice per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine è la espressione:

$$A = \frac{(F_s^2 + 4F_t)(F_{st}^2 - F_{ss} F_{tt})}{(F_t F_{ss} - F_s F_{st} - F_{tt})^2} \ .$$

2. In questa Nota mi fermerò a studiare l'invariante A, ed i polinomi che entrano nella sua formazione.

Dirò *peso* di una derivata di F il numero degli indici s, aumentato del doppio del numero degli indici t; così F_s è di peso uno, F_t di peso due, ...

Dirò poi peso di un prodotto di derivate la somma dei singoli pesi; peso di un quoziente la differenza dei pesi. Se in un polinomio tutti i termini sono di egual peso, questo peso comune si dirà peso del polinomio. Così i polinomi:

$$F_s^2 + 4F_t \ , \ F_t F_{ss} - F_s F_{st} - F_{tt} \ , \ F_{st}^2 - F_{ss} F_{tt}$$

sono rispettivamente di peso *due*, *quattro*, *sei*. L'invariante A è di peso *zero*.

Il polinomio $\varpi_2 = F_s^2 + 4F_t$ è un invariante relativo. Si ha infatti:

$$\delta\varpi_2 = 2F_s \, \delta F_s + 4\delta F_t = (2F_s m_1 + 2m_3) \, \varpi_2 \ ;$$

la equazione $\varpi_2 = 0$ è dunque invariante per tutte le trasformazioni puntuali; essa ha un significato geometrico ben conosciuto: essa esprime che i due sistemi di caratteristiche coincidono su ogni superficie integrale.

Anche i polinomi:

$$\varpi_4 = F_t F_{ss} - F_s F_{st} - F_{tt}$$
$$\varpi_6 = F_{st}^2 - F_{ss} F_{tt}$$

sono invarianti relativi. Si ha infatti:

$$\delta\varpi_4 = (3F_s m_1 + 2m_3 + m_4)\,\varpi_4$$
$$\delta\varpi_6 = (4F_s m_1 + 2m_3 + 2m_4)\,\varpi_6$$

Il sistema di equazioni:

$$\varpi_4 = 0 \quad \varpi_6 = 0$$

è invariante; cioè ogni equazione per cui sia nello stesso tempo:

$$F_{st}^2 - F_{ss} F_{tt} = 0 \qquad F_t F_{ss} - F_s F_{st} - F_{tt} = 0 \tag{7}$$

è cambiata da ogni trasformazione puntuale in una equazione della stessa classe. Si interpretano facilmente le condizioni (7).

Tra le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine che hanno con una equazione del primo ordine infinite superficie integrali in comune, non dipendenti soltanto da un numero finito di costanti arbitrarie, vi è una categoria caratterizzata da questa proprietà [1]: se è $f(xyzpqrst) = 0$ una equazione di quella categoria esiste una funzione $\sigma(xyzpq)$ tale che sia identicamente:

$$\sigma \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 .$$

Immaginando portata la equazione alle derivate parziali sotto la forma $r - F(xyzpqst) = 0$, la condizione precedente diventa:

$$\sigma + F_s - \frac{1}{\sigma} F_t = 0 . \tag{8}$$

Derivando la (8) rispetto s, t, si hanno le condizioni:

$$F_{ss} - \frac{1}{\sigma} F_{st} = 0 \qquad F_{st} - \frac{1}{\sigma} F_{tt} = 0 \tag{9}$$

dalle quali, eliminando σ, si ottiene:

$$\varpi_6 = F_{st}^2 - F_{ss} F_{tt} = 0 .$$

Combinando la (8) con le (9) si ha poi:

$$\varpi_4 = F_{tt} - F_{ss} F_t + F_s F_{ts} = 0 ;$$

[1] Sonin, *Ueber die Integr. der part. Differentialgleichungen.* 2. O. Math. Ann., Bd. 49, pag. 424. Memoria tradotta in tedesco dal russo dal prof. F. Engel.

le equazioni di cui si occupa il § 6*a* della Memoria di Sonin appartengono dunque tutte alla classe invariante $\varpi_4 = 0 \quad \varpi_6 = 0$.

Inversamente, se per una equazione è $\varpi_4 = 0$, $\varpi_6 = 0$ si può porre:

$$(9') \qquad F_{st} = \mu F_{tt} \qquad F_{ss} = \mu F_{st};$$

se fosse $\mu = 0$ sarebbe anche $F_{st} = 0$ $F_{ss} = 0$ e per la $\varpi_4 = 0$ anche $F_{tt} = 0$; se fosse F_{ss} nulla, anche le altre due derivate F_{st}, F_{tt}, lo sarebbero. Se fosse $F_{ss} \neq 0$, ed una delle F_{st}, F_{tt} nulla, anche l'altra è nulla, e per la $\varpi_4 = 0$ anche $F_t = 0$.

Supponiamo dunque che sia:

$$\mu \neq 0, \; F_{ss} \neq 0, \; F_{st} \neq 0, \; F_{tt} \neq 0;$$

dalle (9') combinate con $\varpi_4 = 0$, si ottiene la relazione:

$$\frac{1}{\mu} - \mu F_t + F_s = 0$$

derivando rispetto s, t, e tenendo conto delle (9'), si ha:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\mu}\right) - F_t \cdot \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu}\right) - F_t \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

da cui:

$$F_t = -\frac{1}{\mu^2}$$

e per la $\varpi_4 = 0$

$$F_s = -\frac{2}{\mu}.$$

Ne segue che è $4F_t + F_s^2 = 0$. Il calcolo precedente è in difetto solamente quando μ è una funzione delle sole $x\,y\,z\,p\,q$, nel qual caso la equazione considerata appartiene alla categoria del § 6*a* nella Memoria di Sonin. Dunque:

Le equazioni alle derivate parziali per cui è contemporaneamente:

$$\varpi_4 = 0 \qquad \varpi_6 = 0$$

formano una classe invariante per tutte le trasformazioni puntuali: esse hanno l'una o l'altra delle proprietà seguenti:

1) *o sono lineari rispetto le derivate seconde;*

2) *o sono della forma:*

$$r - F(x\,y\,z\,p\,q\,s) = 0;$$

3) *o hanno i due sistemi di caratteristiche coincidenti su ogni superficie integrale;*

4) *o hanno un integrale di primo ordine e prima classe, e più precisamente appartengono alla categoria di equazioni di cui si occupa il § 6a nella Memoria di Sonin.*

Inversamente, per ogni equazione che abbia l'una o l'altra delle precedenti proprietà è:

$$\varpi_4 = 0 \quad \varpi_6 = 0 .$$

A questo teorema si può aggiungere quest'altro che però conto di dimostrare in altro loco:

Le equazioni che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali, rientrano tutte nella categoria di equazioni per cui è: $\varpi_4 = 0$ $\varpi_6 = 0$.

Fisica. — *Sulla velocità molecolare dei liquidi, e sulle sue variazioni per effetto della pressione* (1). Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

La velocità molecolare dei liquidi e le sue variazioni per effetto della pressione e della temperatura costituiscono un elemento essenziale dei fenomeni che si producono in essi; il determinare come variino le proprietà dei liquidi quando varia la velocità delle molecole mentre rimane costante la distanza e la distribuzione relativa di esse, e reciprocamente, fornirebbe dati molto importanti per la teoria completa dei liquidi.

Ho cercato di dedurre questa velocità da fenomeni diversi, di qualcuno dei quali ho dato così una spiegazione che credo nuova e che è confermata dai risultati. Se si considera che i valori di essa velocità sono ottenuti indirettamente, con una teoria appena abbozzata, senza uso di costanti empiriche che obblighino la teoria ad accordarsi coll'esperienza in un certo numero di casi, si troverà che essi valori sono abbastanza soddisfacenti e lasciano sperare un migliore accordo con uno studio ulteriore e più completo dell'argomento.

Si ammette universalmente che i corpi solidi e liquidi sono costituiti di molecole dotate di grandissima velocità, e poichè queste molecole trovandosi o giungendo nello strato superficiale non l'oltrepassano (eccetto alcune che passano allo stato di vapore e che in uno spazio saturo sono sostituite da quelle che si condensano) ma ritornano indietro con velocità complessivamente uguali e di segno contrario, esse devono esercitare su questo strato una pressione. Uguagliando l'impulso di essa alla variazione della quantità di moto e procedendo in tutto come nel caso dei gaz, si trova la nota rela-

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto fisico della R. Università di Cagliari.