ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 novembre 1897.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un' osservazione sull' estensione dei teoremi di Eulero e Meusnier agli iperspazii.* Nota di Luigi Berzolari, presentata dal Socio Beltrami (1).

I teoremi di Eulero e di Meusnier sulla curvatura delle linee tracciate sopra una superficie (e così pure la teoria dell' indicatrice di Dupin, quella delle linee di curvatura, ecc.) sono stati estesi ad un iperspazio da varî autori (Kronecker, Beez, ... (2)), i quali hanno studiato la curvatura delle linee che si ottengono tagliando una qualsiasi varietà V ad $n-1$ dimensioni dello spazio S_n ad n dimensioni con *piani* (a due dimensioni) passanti per un punto assegnato della varietà (3): il sig. Killing (4) ha inoltre mostrato che risultati analoghi sussistono anche in uno spazio S_n non-euclideo. In questa Nota farò vedere che i suddetti teoremi possono trasportarsi agli iperspazii anche in un altro senso, cioè considerando la curvatura (totale, o di Kronecker) delle varietà ad $n-2$ dimensioni, che risultano tagliando la data varietà V con *iperpiani* (piani ad $n-1$ dimensioni, secondo il linguaggio del sig. Killing) passanti per il punto fissato: per maggior generalità mi riferirò ad uno spazio non-euclideo S_n di curvatura Rieman-

(1) Presentata nella seduta del 7 novembre 1897.

(2) Cfr. Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896), XV, 13 e XVII, 5.

(3) Il sig. Jordan nella Nota *Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces* (Comptes rendus, t. LXXIX, 1874, pag. 909) ha esteso il teorema di Eulero in un altro modo. Cfr. pure Lipschitz, *Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface* (id., t. LXXXII, 1876, pag. 160 e 218, e Giornale di Crelle, Bd. 81).

(4) *Die Nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885), § 11.

niana $\frac{1}{k^2}$, conservando i simboli e le denominazioni del citato libro del sig. Killing, che qui, per chiarezza, richiamo brevemente.

1. I punti di S_n verranno riferiti ad un sistema di *coordinate di Weierstrass* (Killing, l. c., pag. 71): a tal fine, condotti per un punto O n iperpiani $E_1, \ldots, E_n$ a due a due fra loro perpendicolari, e scelto in S_n un punto qualunque P, si indichi con a_i la lunghezza della perpendicolare tirata da P sopra E_i, e con φ_i l'angolo formato da OP coll'asse coordinato normale ad E_i. Allora le coordinate del punto P sono le quantità $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definite come segue:

$$x_0 = \cos\frac{\mathrm{OP}}{k}, \quad x_i = k \operatorname{sen}\frac{a_i}{k} = k \operatorname{sen}\frac{\mathrm{OP}}{k}\cdot\cos\varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

così che fra esse ha luogo la relazione

$$k^2 x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = k^2. \tag{1}$$

Se inoltre si chiamano ϱ la lunghezza della perpendicolare condotta dall'origine sopra un dato iperpiano e ψ_i l'angolo che questa perpendicolare forma coll'asse normale ad E_i, e si pone

$$u_0 = -k \operatorname{sen}\frac{\varrho}{k}, \quad u_i = \cos\frac{\varrho}{k}\cos\psi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le quantità $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sono le coordinate dell'iperpiano considerato: esse son legate dalla relazione

$$\frac{u_0^2}{k^2} + u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1, \tag{2}$$

mentre

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 0$$

è l'equazione dell'iperpiano.

Ora sia

$$\mathrm{F}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{3}$$

l'equazione di una varietà V ad $n-1$ dimensioni, dove, in virtù della (1), la F può supporsi omogenea nelle coordinate. Ponendo

$$\mathrm{F}_i = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}, \quad \mathrm{F}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \, \partial x_j} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

e inoltre

$$\mathrm{S}^2 = \frac{\mathrm{F}_0^2}{k^2} + \mathrm{F}_1^2 + \cdots + \mathrm{F}_n^2, \tag{4}$$

$$\omega = \frac{1}{k}\operatorname{cotg}\frac{\varrho}{k}, \tag{5}$$

l' equazione

$$
(6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \dots & F_n \\ F_0 & F_{00} - Sk^2\omega & F_{01} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{10} & F_{11} - S\omega & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n0} & F_{n1} & \dots & F_{nn} - S\omega \end{vmatrix} = 0
$$

è di grado n in ω, ed ammette la radice $\omega = 0$. I valori $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}$ di ϱ, che in virtù della (5) corrispondono alle altre $n-1$ radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, sono (¹) i cosidetti *raggi principali di curvatura* di V nel punto di coordinate $x_0, x_1, \dots, x_n$, mentre il prodotto

$$
\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} = \frac{1}{k^{n-1}} \cot g \frac{\varrho_1}{k} \cot g \frac{\varrho_2}{k} \dots \cot g \frac{\varrho_{n-1}}{k}
$$

è (Killing, l. c., pag. 210) la *curvatura* (di Kronecker) della varietà V nello stesso punto.

2. Ciò premesso, per dimostrare nel modo più semplice la proprietà che può riguardarsi come nuova estensione del teorema di Meusnier, prendasi come origine delle coordinate il punto O che si è fissato su V, e come iperpiano $x_n = 0$ quello che è tangente a V in O. Avendo da considerare soltanto un campo infinitesimo attorno all' origine, dobbiamo porre $x_0 = 1$ (Killing, l. c., pag. 203 e sgg.), il che val quanto dire che per un tal campo le coordinate di Weierstrass coincidono con un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. L' equazione di V può quindi scriversi nella forma:

$$
(7) \qquad 2x_n = \sum A_{ij}\, x_i\, x_j + P \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1),
$$

dove P è l' aggregato dei termini che sono di grado superiore al secondo nelle $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$. L' iperpiano $x_{n-1} = 0$ è un' iperpiano *qualunque* normale a V in O, e la sezione da esso prodotta in V è rappresentata, entro $x_{n-1} = 0$, da:

$$
2x_n = \sum A_{ij}\, x_i\, x_j + \cdots \quad (i, j = 1, 2, \dots n-2).
$$

Quindi, per la (6), la curvatura R di tale sezione in O è data da:

$$
(8) \qquad R = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-2} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-2,1} & A_{n-2,2} & \dots & A_{n-2,n-2} \end{vmatrix}.
$$

(¹) Killing, l. c., pag. 215, dove è da osservare che, in luogo di $\lambda = \frac{\omega}{S}$, si ha $\lambda = -S\omega$ e che nell' equazione (2 5), in luogo di $\frac{\omega}{S}$, deve scriversi sempre, come abbiam fatto nel testo, $S\omega$.

Ora sia H un iperpiano qualsiasi (cioè non normale a V), il quale, al pari del precedente iperpiano normale, contenga gli assi $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_{n-2}$. Per calcolare, col mezzo della (6), la curvatura che ha in O la sezione di V con H, assumiamo entro H come assi gli assi primitivi $Ox_1, \dots, Ox_{n-2}$ ed inoltre la normale h condotta per O in H allo spazio S_{n-2} determinato dagli assi precedenti. Ciò equivale ad eseguire una trasformazione di coordinate, mantenendo invariata l'origine e gl'iperpiani $x_1 = 0, \dots, x_{n-2} = 0$, e cambiando $x_{n-1} = 0$ ed $x_n = 0$ colle formole:

$$x_{n-1} = a y_{n-1} + b y_n, \quad x_n = c y_{n-1} + \eth y_n,$$

dove $y_{n-1} = 0$ rappresenta l'iperpiano H, ed $y_n = 0$ l'iperpiano normale ad h in O. Sostituendo in (7) e ponendo poi $y_{n-1} = 0$, si ottiene come equazione della sezione di V con H (entro H) la seguente:

$$2 \eth y_n = \sum A_{ij} x_i x_j + \cdots \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-2).$$

Epperò, per la (6) e la (8), la curvatura R_1 di tale sezione in O è data da:

$$R_1 = \frac{R}{\eth^{n-2}}.$$

Ma $\eth$ è il coseno dell'angolo formato dagli iperpiani $x_n = 0$, $y_n = 0$, ossia dell'angolo φ formato dall'iperpiano H coll'iperpiano $x_{n-1} = 0$; quindi la formola precedente diviene:

$$R_1 = \frac{R}{\cos^{n-2} \varphi}.$$

Pertanto: *Data in S_n una varietà ad $n-1$ dimensioni, la curvatura (di Kronecker) in un punto di una sua sezione iperpiana qualsiasi è uguale alla curvatura della sezione iperpiana normale avente la medesima traccia sull'iperpiano tangente in quel punto, divisa per la $(n-2)^{\text{ma}}$ potenza del coseno dell'angolo formato dai due iperpiani secanti.*

3. Il teorema precedente si può dimostrare anche senza fare speciali ipotesi sulla posizione degli iperpiani coordinati, cioè partendo dall'equazione generale (3) della varietà V. In tale dimostrazione — di cui la prima parte si basa sopra un concetto analogo a quello cui s'informa la prima parte della dimostrazione data dal sig. Killing al l. c., n. 116 — faremo uso dei simboli definiti al n. 1.

Siano $x_0, x_1, \dots, x_n$ le coordinate del punto x fissato su V, e $z_0, z, \dots, z_n$ quelle del punto corrente z d'un iperpiano arbitrario Z passante per x. Scegliendo delle quantità a_{ij} che soddisfacciano alle relazioni:

$$\begin{gathered} k^2 a_{i0}^2 + a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1, \\ k^2 a_{i0} x_0 + a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = 0, \\ k^2 a_{i0} a_{j0} + a_{i1} a_{j1} + \cdots + a_{in} a_{jn} = 0 \\ (i \lesseqgtr j, \quad i, j = 1, 2 \dots, n-1), \end{gathered}$$

ed inoltre a queste altre:

$$(9) \qquad a_{i0} F_0 + a_{i1} F_1 + \cdots + a_{in} F_n = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

le z_i si possono rappresentare nella forma:

$$(10) \qquad z_i = y_0 x_i + y_1 a_{1i} + \cdots + y_{n-1} a_{n-1,i}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n),$$

colla condizione

$$k^2 y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 = k^2,$$

e le $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ si possono assumere come coordinate di Weierstrass del punto z entro l'iperpiano Z.

Le quantità $(k^2 a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (k^2 a_{n-1,0}, a_{n-1,1}, \ldots, a_{n-1,n})$ sono le coordinate di $n-1$ iperpiani $A^{(1)}, \ldots, A^{(n-1)}$ passanti pel punto x, perpendicolari fra loro a due a due e perpendicolari anche a Z; inoltre gl' iperpiani $A^{(1)}, \ldots, A^{(n-2)}$ passano per la normale in x a V. Date le quantità a_{ij}, ossia dati gl' iperpiani $A^{(1)}, \ldots, A^{(n-1)}$, resta individuato l'iperpiano Z; invece, dato Z, si hanno infiniti sistemi di quegli iperpiani: per costruirne uno qualunque, basta considerare il piano individuato dalle normali in x a V ed a Z, e per esso far passare $n-2$ iperpiani qualunque $A^{(1)}, \ldots, A^{(n-2)}$ fra loro perpendicolari a due a due, indi per la normale in x a Z condurre l'iperpiano $A^{(n-1)}$ perpendicolare ai precedenti. L'angolo φ formato da Z colla normale in x a V è uguale all'angolo di $A^{(n-1)}$ coll' iperpiano tangente a V in x, epperò, essendo $\frac{F_0}{S}, \frac{F_1}{S}, \ldots, \frac{F_n}{S}$ le coordinate di quest' ultimo, si avrà:

$$(11) \qquad \cos\varphi = \frac{a_{n-1,0} F_0 + a_{n-1,1} F_1 + \cdots + a_{n-1,n} F_n}{S}.$$

Ora sia $\Phi(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ ciò che diventa la F quando al posto delle x_i si sostituiscono i secondi membri delle (10), così che, entro Z, sarà

$$\Phi(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0$$

l'equazione della sezione di V con Z. Ponendo

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \, \partial y_j} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\sigma^2 = \frac{\Phi_0^2}{k^2} + \Phi_1^2 + \cdots + \Phi_{n-1}^2,$$

si avrà:

$$\Phi_0 = F_0 x_0 + F_1 x_1 + \cdots + F_n x_n,$$
$$\Phi_i = F_0 a_{i0} + F_1 a_{i1} + \cdots + F_n a_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

ossia, pel fatto che il punto x sta sopra V e per le (9) e la (11),

$$\Phi_0 = \Phi_1 = \cdots = \Phi_{n-2} = 0\,, \quad \Phi_{n-1} = \mathrm{S}\cos\varphi\,,$$

e quindi:

$$\sigma = \mathrm{S}\cos\varphi\,.$$

Inoltre:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{00} &= \sum \mathrm{F}_{ij}\, x_i\, x_j = 0\,,\\ \Phi_{0m} &= \sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{mi}\, x_j = 0\,,\\ \Phi_{mm} &= \sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{mi}\, a_{mj}\end{aligned}\right\}\quad (m = 1\,, 2\,, \ldots\,, n-2).$$

Di qui e dalle (6) e (11) si ricava, per la curvatura della sezione di V con Z nel punto x, l'espressione:

$$(12)\qquad \mathrm{R}_1 = \frac{(\sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{1i}\, a_{1j})\,(\sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{2i}\, a_{2j}) \ldots (\sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{n-2,i}\, a_{n-2,j})}{\left(\sum\limits_0^n \mathrm{F}_i\, a_{n-1,i}\right)^{n-2}}\,.$$

Se Z passa per la normale a V in x, l'iperpiano $\mathrm{A}^{(n-1)}$ coincide con quello che è tangente a V in x, sicchè:

$$k^2\, a_{n-1,0} = \frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{S}}\,, \quad a_{n-1,1} = \frac{\mathrm{F}_1}{\mathrm{S}}\,, \ldots\,, a_{n-1,n} = \frac{\mathrm{F}_n}{\mathrm{S}}\,,$$

e la curvatura della sezione in x viene espressa da:

$$\mathrm{R} = \frac{(\sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{1i}\, a_{1j})\,(\sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{2i}\, a_{2j}) \ldots (\sum \mathrm{F}_{ij}\, a_{n-2,i}\, a_{n-2,j})}{\mathrm{S}^{n-2}}\,.$$

Confrontando questa colla (12) e facendo uso della (11), risulta:

$$\mathrm{R}_1 = \frac{\mathrm{R}}{\cos^{n-2}\varphi}\,,$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

4. Proponiamoci ora di confrontare fra loro le curvature delle sezioni iperpiane normali passanti per uno stesso punto di V; a tal fine, come nel n. 2, prendiamo per origine O il punto fissato, e per iperpiano $x_n = 0$ quello che è tangente a V in O, indi scegliamo gli altri iperpiani coordinati in guisa che l'equazione dell'indicatrice (Killing, l. c., pag. 204 e 207) contenga soltanto i quadrati delle coordinate. L'equazione di V (posto $x_0 = 1$) avrà allora la forma:

$$(13)\qquad 2\,x_n = \mathrm{A}_1\, x_1^2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\, x_{n-1}^2 + \mathrm{P}\,,$$

dove alcune delle A possono anche esser nulle. Sia t una retta qualunque tangente a V in O, e siano $\varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots\,, \varphi_{n-1}$ gli angoli da essa formati cogli assi $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_{n-1}$ (cioè cogli assi dell' indicatrice). Se nell' iperpiano tangente $x_n = 0$ consideriamo lo spazio S_{n-2} passante per O e perpendicolare a t, esso coll' asse Ox_n individua un iperpiano, la cui equazione è:

$$(14) \qquad x_1 \cos \varphi_1 + \cdots + x_{n-1} \cos \varphi_{n-1} = 0:$$

e questa, entro $x_n = 0$, è pure l' equazione del detto spazio S_{n-2}. Nello stesso iperpiano $x_n = 0$ cambiamo gli assi $Ox_1, \ldots, Ox_{n-1}$, assumendo come nuovo spazio S_{n-2} rappresentato da $y_{n-1} = 0$ quello che ha l' equazione (14), ossia poniamo

$$(15) \qquad x_i = \gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \cdots + \gamma_{i,n-1} y_{n-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dove γ_{ij} è il coseno dell' angolo formato da $x_i = 0$ con $y_j = 0$, epperò in particolare

$$(16) \qquad \gamma_{i,n-1} = \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Sostituendo le (15) in (13) e ponendo poscia $y_{n-1} = 0$, risulta come equazione della sezione di V coll' iperpiano (14):

$$2 x_n = \sum B_{ij} y_i y_j + \cdots \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-2),$$

avendo posto:

$$(17) \qquad B_{ij} = A_1 \gamma_{1i} \gamma_{1j} + A_2 \gamma_{2i} \gamma_{2j} + \cdots + A_{n-1} \gamma_{n-1,i} \gamma_{n-1,j}.$$

La curvatura di questa sezione in O, dedotta dalla (6), è data dal secondo membro della (8), in cui al posto delle A_{ij} siansi sostituite le B_{ij}. Se ora in luogo di queste ultime si pongono le loro espressioni (17) e si svolge il determinante come somma di altri determinanti formati colle sue colonne, si riconosce che ciascuno dei determinanti non nulli che così risultano è il prodotto di $n-2$ fra le quantità $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ per il quadrato di un minore d' ordine $n-2$ tratto dal determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 1:$$

minore che è quindi uguale al proprio complemento algebrico. Avendo presenti le (16), la curvatura cercata risulta espressa come segue:

$$A_2 A_3 \ldots A_{n-1} \cos^2 \varphi_1 + A_1 A_3 \ldots A_{n-1} \cos^2 \varphi_2 + \cdots + A_1 A_2 \ldots A_{n-2} \cos^2 \varphi_{n-1},$$

e ciò fornisce l' estensione, che avevamo in vista, della nota formola di Eulero.

Di qui segue che *la curvatura in* O *delle sezioni iperpiane normali ha un massimo od un minimo, quando la traccia dell' iperpiano secante* *sull'iperpiano tangente a* V *in* O *è uno degli spazii* S_{n-2} *principali dell'indicatrice.*

Inoltre, *se si considerano* $n-1$ *iperpiani qualunque normali in* O *alla data varietà e fra loro perpendicolari a due a due, la somma delle curvature delle rispettive sezioni in* O *è costante.* Ecc.

Matematica. — *Sull'integrazione per serie.* Nota del prof. CESARE ARZELÀ, presentata dal Corrispondente VOLTERRA [1].

1. Sia $f(x, y)$ una funzione delle due variabili reali x e y definita nell'intervallo $a \dots . b$ sopra ogni retta $y = y_1$, $y = y_2$, ... : y_1, y_2 .... essendo un gruppo di numeri che hanno per numero-limite il numero y_0. Sia $f(x, y_s)$, per ogni y_s fisso, $(s = 1, 2, 3, \dots)$, finita e atta all'integrazione definita fra a e b e in ogni punto x ivi sia determinato e finito

$$f(x, y_0) = \lim_{y_s = y_0} f(x, y_s).$$

Nella Nota, *Sull'integrabilità di una serie di funzioni*, pubblicata nei Rendiconti di cotesta Accademia per l'anno 1885, è data la proposizione (a): *affinchè la* $f(x, y_0)$ *sia tra* a *e* b *atta all'integrazione, è necessario e sufficiente che fissati ad arbitrio uno qualunque dei numeri* y_s *e altri due numeri positivi* σ *e* ε, *si possa sempre separare nell'intervallo* $a \dots . b$ *dei tratticelli* $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_p$ *in numero finito e di somma minore di* ε, *in modo che la porzione rimanente si possa percorrere mediante un numero finito di tratti presi su rette del gruppo* $y = y_{s+1}, y_{s+2}, \dots,$ *in ogni punto dei quali si abbia*

$$| f(x, y_0) - f(x, y_{l_{(x)}}) | < 2\sigma$$

Sarà $y = y_{l_{(x)}}$ l'equazione della linea spezzata formata coi tratti ora detti.

Questo modo di convergere della $f(x, y_s)$ alla $f(x, y_0)$ al tendere di y_s a y_0 lo abbiamo denominato *convergenza uniforme a tratti in generale.*

Siano $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... funzioni della x e si faccia

$$f(x, y_s) = \sum_1^s u_n(x) \text{ e } f(x, y_0) = \sum_1^\infty u_n(x):$$

la proposizione di dianzi ci dà subito la condizione d'integrabilità di una serie di funzioni integrabili.

2. Nell'altra Nota successiva, *Sull'integrazione per serie*, pubblicata negli stessi Rendiconti, tenute ferme le precedenti ipotesi per $f(x, y_s)$ e $f(x, y_0)$ è enunciata la proposizione: (b) *la condizione necessaria e suffi-*

[1] Presentata nella seduta del 7 novembre 1897.