ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

sull'iperpiano tangente a V *in* O *è uno degli spazii* S_{n-2} *principali dell'indicatrice.*

Inoltre, *se si considerano* $n-1$ *iperpiani qualunque normali in* O *alla data varietà e fra loro perpendicolari a due a due, la somma delle curvature delle rispettive sezioni in* O *è costante.* Ecc.

Matematica. — *Sull'integrazione per serie.* Nota del prof. CESARE ARZELÀ, presentata dal Corrispondente VOLTERRA [1].

1. Sia $f(x, y)$ una funzione delle due variabili reali x e y definita nell'intervallo $a \ldots . b$ sopra ogni retta $y = y_1$, $y = y_2$, $\ldots . : y_1, y_2 \ldots .$ essendo un gruppo di numeri che hanno per numero-limite il numero y_0. Sia $f(x, y_s)$, per ogni y_s fisso, $(s = 1, 2, 3, \ldots)$, finita e atta all'integrazione definita fra a e b e in ogni punto x ivi sia determinato e finito

$$f(x, y_0) = \lim_{y_s = y_0} f(x, y_s).$$

Nella Nota, *Sull'integrabilità di una serie di funzioni*, pubblicata nei Rendiconti di cotesta Accademia per l'anno 1885, è data la proposizione (a): *affinchè la* $f(x, y_0)$ *sia tra* a *e* b *atta all'integrazione, è necessario e sufficiente che fissati ad arbitrio uno qualunque dei numeri* y_s *e altri due numeri positivi* σ *e* ε, *si possa sempre separare nell'intervallo* $a \ldots . b$ *dei tratticelli* $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_p$ *in numero finito e di somma minore di* ε, *in modo che la porzione rimanente si possa percorrere mediante un numero finito di tratti presi su rette del gruppo* $y = y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots .$, *in ogni punto dei quali si abbia*

$$| f(x, y_0) - f(x, y_{l_{(x)}}) | < 2\sigma$$

Sarà $y = y_{l_{(x)}}$ l'equazione della linea spezzata formata coi tratti ora detti.

Questo modo di convergere della $f(x, y_s)$ alla $f(x, y_0)$ al tendere di y_s a y_0 lo abbiamo denominato *convergenza uniforme a tratti in generale.*

Siano $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots .$ funzioni della x e si faccia

$$f(x, y_s) = \sum_1^s u_n(x) \quad \text{e} \quad f(x, y_0) = \sum_1^\infty u_n(x):$$

la proposizione di dianzi ci dà subito la condizione d'integrabilità di una serie di funzioni integrabili.

2. Nell'altra Nota successiva, *Sull'integrazione per serie*, pubblicata negli stessi Rendiconti, tenute ferme le precedenti ipotesi per $f(x, y_s)$ e $f(x, y_0)$ è enunciata la proposizione: (b) *la condizione necessaria e suffi-*

[1] Presentata nella seduta del 7 novembre 1897.

ciente affinchè, presupposta l' integrabilità di $f(x, y_s)$ e $f(x, y_0)$, sia per ogni x

$$\int_a^x f(x, y_0)\, dx = \lim_{y_s = y_0} \int_a^x f(x, y_s)\, dx \tag{1}$$

è che

$$\lim_{y_s = y_0} \int_a^x f(x, y_s)\, dx = \Phi(x, y_0)$$

esiste, per ogni x, finita e continua.

Su questo enunciato abbiamo da fare alcune osservazioni.

Anzitutto è da distinguersi il caso in cui è, per ogni x e per ogni y_s,

$$| f(x, y_s) | < \mathrm{L}$$

L essendo finito, da quello in cui ciò non è.

Alla prima lettura delle due proposizioni sopra richiamate può apparire che per riconoscere se è giusta la (1) occorre un doppio esame: *quello della integrabilità della $f(x, y_0)$ e l' altro della continuità di $\Phi(x, y_0)$.*

Ora è importante mettere in evidenza questo, che, nel caso in cui è sempre

$$| f(x, y_s) | < \mathrm{L}$$

il secondo esame è superfluo: giacchè come è mostrato al n°. 2 della Nota medesima, *Sull' integrazione per serie*, presupposta l' integrabilità di $f(x, y_0)$, si ha anche sempre

$$\int_a^x f(x, y_0)\, dx = \lim_{y_s = y_0} \int_a^x f(x, y_s)\, dx$$

dimodochè, se si fa

$$f(x, y_s) = \sum_1^s u_n(x)$$

$$f(x, y_0) = \sum_1^\infty u_n(x)$$

si può enunciare: *se ognuna delle $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... è integrabile ed è, per ogni x e per ogni s*

$$\left| \sum_1^s u_n(x) \right| < \mathrm{L}$$

affinchè si abbia

$$\int_a^x \sum_1^\infty u_n(x) \cdot dx = \sum_1^\infty \int_a^x u_n(x)\, dx$$

è necessario e sufficiente che la $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ *abbia la convergenza uniforme a tratti in generale.*

Nell'altro caso poi in cui non è sempre

$$| f(x, y_s) | < \mathrm{L}$$

la convergenza uniforme a tratti in generale della $f(x, y_s)$ verso la $f(x, y_0)$ è la condizione dell'integrabilità di questa, come è detto alla proposizione (a); ma la continuità di $\Phi(x, y_0)$ non è sempre sufficiente perchè sia valida la (1), come ha mostrato con un esempio il sig. Osgood nella Memoria, *Non-Uniform Convergence and the Integration of Series Term by Term.* (American journal of Mathematics, vol. XIX).

In una prossima Nota, mi riserbo di trattare appunto il caso ora menzionato in cui non *è possibile assegnare un numero finito* L *tale che sia sempre*

$$| f(x, y_s) | < \mathrm{L}.$$

Fisica. — *Intorno ad un modo di diminuire notevolmente lo spazio nocivo nei termometri ad aria.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Negli apparati, nei quali occorre conoscere con esattezza il volume e la pressione d'un gas e si misura questa mediante un manometro ad aria libera (o idrostatico) a mercurio, sarebbe utile che il ramo del manometro che comunica direttamente col gas suddetto fosse capillare, perchè in tal caso si potrebbe determinare con maggior esattezza il volume di esso gas. Nei termometri ad aria, il vantaggio che ne risulterebbe, sarebbe ancor maggiore, perchè si potrebbe così render minima la quantità d'aria che si trova alla temperatura dell'ambiente, diversa da quella che di solito si vuol misurare, e che perciò richiede una correzione, e produce una complicazione non lieve della formula che dà la temperatura cercata.

È noto però che diminuendo il diametro del tubo del manometro, s'introduce nella misura della pressione un errore di capillarità tanto maggiore quanto minore è il diametro del tubo, e che per uno stesso tubo, è ben lungi da esser costante e noto.

Tuttavia anche quest'errore di capillarità si può facilmente evitare, qualora il ramo del manometro, che comunica col gas di cui si vuol misurare la pressione, termini superiormente in forma di cono, col vertice in alto e colle generatrici facenti un angolo di circa 45° coll'asse del cono, e che si faccia arrivare il livello del mercurio fino ad un punto qualsiasi del cono stesso; come di solito la pressione del gas si potrà equilibrare facendo variare l'altezza del mercurio nell'altro ramo.