# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME VI.**

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

**Matematica.** — *Nuove ricerche sopra alcuni invarianti puntuali delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.* Nota del dott. P. MEDOLAGHI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Alla ricerca degli invarianti di ordine superiore farò precedere alcune considerazioni generali.

Ai simboli $F^{(k)}$, $F_s^{(k)}$, $F_t^{(k)}$ conserviamo il significato che hanno in una mia Nota precedente [1]. Si ha:

$$(1)\quad \begin{cases} \delta F_s^{(k)} = \dfrac{\partial \delta F^{(k)}}{\partial s} + (m_1 F_s + m_4 - m_3) F_s^{(k)} + 2m_1 F_t^{(k)} \\[2ex] \delta F_t^{(k)} = \dfrac{\partial \delta F^{(k)}}{\partial t} + (m_1 F_t + m_2) F_s^{(k)} + m_4 F_t^{(k)} . \end{cases}$$

Nelle variazioni delle derivate di un ordine qualunque non entrano dunque che le arbitrarie $m_1, m_2, m_3, m_4$: e la ricerca degli invarianti di un ordine determinato conduce sempre alla integrazione di un sistema completo di quattro equazioni. Il numero degli invarianti di ordine $\leqq k$ è dunque:

$$1 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k-2)(k+5)}{2} + 1 .$$

Dalle formole (1) si può ricavare una curiosa proprietà degli invarianti. Cominciamo a supporre che sia:

$$\delta F^{(k)} = (\alpha m_3 + \beta m_4) F^{(k)} + \cdots$$

in cui $\alpha, \beta$ sono costanti, ed i termini omessi non contengono che $m_1, m_2$. Allora sarà:

$$\begin{aligned} \delta F_s^{(k)} &= [(\alpha - 1) m_3 + (\beta + 1) m_4] F_s^{(k)} + \cdots \\ \delta F_t^{(k)} &= [(\alpha m_3 \qquad\quad + (\beta + 1) m_4] F_t^{(k)} + \cdots \end{aligned}$$

Supponiamo ancora che $\alpha + 2\beta$ sia il peso di $F^{(k)}$; allora le quantità analoghe formate per $F_s^{(k)}$, $F_t^{(k)}$ sono eguali ai rispettivi pesi. Per le variazioni delle derivate prime e seconde hanno luogo tutte queste proprietà; esse dunque si verificano anche per le derivate di ordine superiore. Ciò posto, due delle equazioni a cui devono soddisfare gli invarianti sono:

$$X_3 f = F_s \frac{\partial f}{\partial F_s} + 2 F_t \frac{\partial f}{\partial F_t} + F_{st} \frac{\partial f}{\partial F_{st}} + 2 F_{tt} \frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + \cdots + \alpha F^{(k)} \frac{\partial f}{\partial F^{(k)}} + \cdots$$

$$X_4 f = F_{ss} \frac{\partial f}{\partial F_{ss}} + F_{st} \frac{\partial f}{\partial F_{st}} + F_{tt} \frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + \cdots + \beta F^{(k)} \frac{\partial f}{\partial F^{(k)}} + \cdots ;$$

[1] V. Rendiconti di questa Accademia, vol. VI, serie 5ª, 2º sem, pagg. 247-254.

in particolare essi devono soddisfare alla equazione:

$$X_3 f + 2X_4 f = \sum p^{(k)} F^{(k)} \frac{\partial f}{\partial F^{(k)}}$$

in cui $p^{(k)}$ indica il peso della derivata $F^{(k)}$. Dunque *tutti gli invarianti sono di peso zero.*

Procedo ora nella ricerca degli invarianti. Sia $\varphi$ un invariante assoluto; con la solita regola, si ha:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_s &= \varphi_s(m_1 F_s + m_4 - m_3) + 2m_1 \varphi_t \\ \delta\varphi_t &= (m_1 F_t + m_2)\varphi_s + m_4 \varphi_t . \end{aligned}$$

Nelle variabili $F_s, F_t, F_{ss}, F_{st}, F_{tt}, \varphi_s, \varphi_t$ si può formare un sistema completo di quattro equazioni, di cui le tre soluzioni saranno dei nuovi invarianti; il sistema completo in questione è:

$$\begin{aligned} X_1 f = (F_s^2 + 2F_t)\frac{\partial f}{\partial F_s} + F_s F_t \frac{\partial f}{\partial F_t} + (3F_s F_{ss} + 4F_{st})\frac{\partial f}{\partial F_{ss}} + \\ + (2F_s F_{st} + 2F_{tt} + F_{ss} F_t)\frac{\partial f}{\partial F_{st}} + (F_s F_{tt} + 2F_{st} F_t)\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + \\ + (\varphi_s F_s + 2\varphi_t)\frac{\partial f}{\partial \varphi_s} + \varphi_s F_t \frac{\partial f}{\partial \varphi_t} = 0 \end{aligned}$$

$$X_2 f = -2\frac{\partial f}{\partial F_s} + F_s\frac{\partial f}{\partial F_t} + F_{ss}\frac{\partial f}{\partial F_{st}} + 2F_{st}\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + \varphi_s\frac{\partial f}{\partial \varphi_t} = 0$$

$$X_3 f = F_s\frac{\partial f}{\partial F_s} + 2F_t\frac{\partial f}{\partial F_t} + F_{st}\frac{\partial f}{\partial F_{st}} + 2F_{tt}\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} - \varphi_s\frac{\partial f}{\partial \varphi_s} = 0$$

$$X_4 f = F_{ss}\frac{\partial f}{\partial F_{ss}} + F_{st}\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + F_{st}\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + \varphi_s\frac{\partial f}{\partial \varphi_s} + \varphi_t\frac{\partial f}{\partial \varphi_t} = 0 .$$

Delle tre soluzioni una, (l'invariante A), è stata calcolata nella Nota sopra citata; le altre due contengono $\varphi_s$ e $\varphi_t$, e sono:

$$\begin{aligned} D_s(\varphi) &= \varpi_6^{-1}(F_{st}\varpi_2 + F_s\varpi_4)\varphi_s + \varpi_6^{-1}(2\varpi_4 - F_{ss}\varpi_2)\varphi_t \\ D_t(\varphi) &= \varpi_6^{-1}\varpi_2^{\frac{1}{2}}(F_{tt} + F_t F_{ss})\varphi_s - \varpi_6^{-1}\varpi_2^{\frac{1}{2}}(F_s F_{ss} + 2F_{st})\varphi_t \end{aligned}$$

Mi servirò in seguito di questi due parametri differenziali che presentano su tutti gli altri il vantaggio di contenere linearmente le derivate di $\varphi$; ma voglio a questo punto indicare un altro parametro differenziale che si potrebbe formare con i due precedenti, il parametro:

$$\Delta(\varphi) = \frac{\varpi_2}{\varpi_6}(F_t\varphi_s^2 - F_s\varphi_s\varphi_t - \varphi_t^2),$$

notevole per l'analogia col primo parametro differenziale di Beltrami.

Vi sono poi tre parametri differenziali con le derivate seconde di $\varphi$, quattro con le derivate terze, ... $h+1$ con le derivate di ordine $h$. Questi parametri si ottengono del resto combinando le operazioni $D_s(\varphi)$, $D_t(\varphi)$. Così, per esempio, come parametri del secondo ordine possiamo assumere i seguenti:

$$D_s\{D_s(\varphi)\}, \quad D_s\{D_t(\varphi)\}, \quad D_t\{D_t(\varphi)\}.$$

cho indicheremo rispettivamente con:

$$D_{ss}(\varphi), \quad D_{st}(\varphi), \quad D_{tt}(\varphi).$$

Applicando i parametri $D_s(\varphi)$, $D_t(\varphi)$ all'invariante A si ottengono due invarianti del terzo ordine; di questi ve ne sono quattro indipendenti: ne restano dunque a determinare ancora due. Per ottenerli, cominciamo col calcolare le variazioni delle derivate terze di F; e col costruire il sistema completo di quattro equazioni tra

$$F_s, F_t, F_{ss}, F_{st}, F_{tt}, F_{sss}, F_{sst}\, F_{stt}, F_{ttt}$$

da cui dipende la determinazione degli invarianti.

Indicheremo con $X_i f = 0$ la equazione ottenuta esprimendo che deve annullarsi il coefficiente di $m_i$. Come nella Nota sopraindicata, alla equazione $X_1 f = 0$ si sostituirà la $Yf = X_1 f + F_t X_2 f - F_s X_3 f - F_s X_4 f = 0$, e si ha allora:

$$\begin{aligned} Yf = &(2F_s F_{ss} + 4F_{st}) \frac{\partial f}{\partial F_{ss}} + (2F_{tt} + 2F_t F_{ss}) \frac{\partial f}{\partial F_{st}} + (4F_t F_{st} - 2F_s F_{tt}) \frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + \\ &+ (3F_s F_{ss} + 3F_{ss}^2 + 6F_{sst}) \frac{\partial f}{\partial F_{sss}} + (F_s F_{sst} + 3F_{st} F_{ss} + 4F_{stt} + 2F_t F_{sss}) \frac{\partial f}{\partial F_{sst}} + \\ &+ (2F_{ttt} - F_s F_{stt} + 4F_t F_{sst} + 2F_{st}^2 + F_{ss} F_{tt}) \frac{\partial f}{\partial F_{stt}} + \\ &+ (6F_t F_{stt} + 3F_{tt} F_{st} - 3F_s F_{ttt}) \frac{\partial f}{\partial F_{ttt}} = 0 . \end{aligned}$$

Di questa equazione si conoscono già le soluzioni $F_s$, $F_t$, $\varpi_4$, $\varpi_6$; bisognerebbe determinare le altre quattro soluzioni. Ecco però un artificio che conduce più presto agli invarianti cercati.

Poniamo:

$$\begin{aligned} \mu &= F_{stt} + F_s F_{sst} - F_t F_{sss} \\ \nu &= F_{ttt} + F_s F_{stt} - F_t F_{sst} . \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} Y(\mu) &= F_s \mu + 2\nu + 2\varpi_6 - 3F_{ss}\varpi_4 \\ Y(\nu) &= 2F_t \mu - F_s \nu - F_s \varpi_6 - 3F_{st}\varpi_4 \end{aligned}$$

osserviamo ora che $Y(F_{ss})$, $Y(F_{st})$ si possono esprimere in funzione di $F_{ss}$, $F_{st}$ e di soluzioni della $Yf = 0$. Vi sono dunque tre invarianti di $Yf = 0$ che sono delle funzioni soltanto di $F_{ss}$, $F_{st}$, $\mu$, $\nu$ oltre che delle $F_s$, $F_t$, $\varpi_4$, $\varpi_6$. Appunto questi invarianti voglio ora determinare.

Ponendo:

$$y_1 = F_{ss}\varpi_2 - 2\varpi_4\,, \quad y_2 = F_{st}\varpi_2 + F_s\varpi_4$$
$$y_3 = \mu\varpi_2\,, \qquad y_4 = \nu\varpi_2 + \varpi_6\varpi_2 - 3\varpi_4^2$$

si ha:

$$Y(y_1) = 2F_s y_1 + 4y_2\,, \qquad Y(y_2) = 4F_t y_1 - 2F_s y_2$$
$$Y(y_3) = F_s y_3 + 2y_4 - 3\varpi_4 y_1\,, \quad Y(y_4) = 2F_t y_3 - F_s y_4 - 3\varpi_4 y_2\,.$$

Notiamo che gli invarianti devono soddisfare oltre che ad $Yf = 0$ anche alle equazioni $X_2 f = 0$, $X_3 f = 0$, $X_4 f = 0$; terremo conto per ora soltanto della $X_2 f = 0$. Si ha:

$$X_2 f = -2\frac{\partial f}{\partial F_s} + F_s\frac{\partial f}{\partial F_t} + F_{ss}\frac{\partial f}{\partial F_{st}} + 2F_{st}\frac{\partial f}{\partial F_{tt}} + F_{sss}\frac{\partial f}{\partial F_{sst}} + 2F_{sst}\frac{\partial f}{\partial F_{stt}} + 3F_{stt}\frac{\partial f}{\partial F_{ttt}} = 0$$

Dunque:

$$X_2(y_1) = 0\,, \quad X_2(y_2) = y_1\,, \quad X_2(y_3) = 0\,, \quad X_2(y_4) = y_3\,.$$

Invece delle $y_2, y_4$, prendiamo dunque le variabili:

$$z_1 = F_s y_1 + 2y_2\,, \quad z_3 = F_s y_3 + 2y_4$$

che sono soluzioni di $X_2 f = 0$. Otterremo allora:

$$Y(y_1) = 2z_1\,, \qquad Y(z_1) = 2\varpi_2 y_1$$
$$Y(y_3) = z_3 - 3\varpi_4 y_1\,, \quad Y(z_3) = \varpi_2 y_3 - 3\varpi_4 z_1\,.$$

Siamo dunque ridotti a dover integrare l'equazione:

$$2z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + 2\varpi_2 y_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + (z_3 - 3\varpi_4 y_1)\frac{\partial f}{\partial y_3} + (\varpi_2 y_3 - 3\varpi_4 z_1)\frac{\partial f}{\partial z_3} = 0\,.$$

Le soluzioni di questa equazione si determinano senza difficoltà; sono:

$$\alpha = z_1^2 - \varpi_2 y_1^2$$
$$\beta = z_3^2 - \varpi_2 y_3^2 + 6\varpi_4(y_1 z_3 - y_3 z_1)$$
$$\gamma = (\varpi_2 y_1 y_3 - z_1 z_3)^2 - \varpi_2(y_1 z_3 - y_3 z_1)^2 - \alpha(z_3^2 - \varpi_2 y_3^2)\,.$$

Queste tre espressioni non soddisfano alle equazioni $X_3 f = 0$, $X_4 f = 0$; ma da ognuna delle $\alpha, \beta, \gamma$, si può giungere ad una soluzione anche di queste equazioni, moltiplicando ogni volta per un fattore convenientemente composto con le $\varpi_2, \varpi_4, \varpi_6$. Si giunge così agli invarianti:

$$\frac{\alpha}{\varpi_4^2\varpi_2} = 4(A - 1)$$

$$B = \frac{\beta}{\varpi_4^4}\,, \quad C = \frac{\gamma}{\varpi_4^6\varpi_2}\,.$$

Gli invarianti B, C sono effettivamente del terzo ordine ed indipendenti tra loro. Resta però a dimostrare che essi sono distinti dagli invarianti $D_s(A)$, $D_t(A)$.

Negli invarianti B, C le derivate del terzo ordine non compariscono che nelle combinazioni $y_3$, $y_4$, o, ciò che è lo stesso, nelle combinazioni:

$$\mu\,, \quad \nu + \varpi_6\,;$$

ma si ha appunto:

$$\mu = -\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}\,, \quad \nu + \varpi_6 = -\frac{\partial \varpi_4}{\partial t}\,;$$

dunque in B, C le derivate del terzo ordine non compariscono che nelle combinazioni $\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}$, $\frac{\partial \varpi_4}{\partial t}$. Nelle $D_s(A)$. $D_t(A)$, esse compariscono invece nelle combinazioni $\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}$, $\frac{\partial \varpi_4}{\partial t}$, $\frac{\partial \varpi_6}{\partial t}$, $\frac{\partial \varpi_6}{\partial t}$. Si ha ora:

$$\frac{D[B\,, C\,, D_s(A)\,, D_t(A)]}{D[F_{sss}\,, F_{sst}\,, F_{stt}\,, F_{ttt}]} =$$

$$= \frac{D[B\,, C\,, D_s(A)\,, D_t(A)]}{D\left[\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_4}{\partial t}, \frac{\partial \varpi_6}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_6}{\partial t}\right]} \cdot \frac{D\left[\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_4}{\partial t}, \frac{\partial \varpi_6}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_6}{\partial t}\right]}{D[F_{sss}\,, F_{sst}\,, F_{stt}\,, F_{ttt}]}\,;$$

il secondo fattore del secondo membro è diverso da zero, pel primo fattore si ha:

$$\frac{D[B\,, C\,, D_s(A)\,, D_t(A)]}{D\left[\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_4}{\partial t}, \frac{\partial \varpi_6}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_6}{\partial t}\right]} = \frac{D[B\,, C]}{D\left[\frac{\partial \varpi_4}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_4}{\partial t}\right]} \cdot \frac{D[D_s(A)\,, D_t(A)]}{D\left[\frac{\partial \varpi_6}{\partial s}, \frac{\partial \varpi_8}{\partial t}\right]}\,;$$

poichè ognuno dei fattori del secondo membro è effettivamente diverso da zero, gli invarianti B, C, $D_s(A)$; $D_t(A)$, sono indipendenti tra loro.

Applicando una volta i parametri differenziali $D_s(\varphi)$, $D_t(\varphi)$ agli invarianti B, C, $D_s(A)$, $D_t(A)$, si formano tutti gli invarianti del quarto ordine; e così procedendo si formano tutti gli invarianti di ordine superiore. Il problema che mi ero proposto al principio della Nota già citata, la determinazione cioè degli invarianti puntuali che contengono soltanto le derivate di F rispetto $s$ e $t$, si può considerare come completamente risoluto.

Una ricerca analoga a questa si potrebbe istituire prendendo a fondamento il gruppo delle trasformazioni di contatto. La determinazione degli invarianti di ordine $k$ dipenderebbe in questo caso da un sistema completo di *sette* equazioni: vi sono dunque *due* invarianti di terzo ordine, *cinque* del quarto ordine, ... $h+1$ dell' ordine $h$. Delle sette equazioni che definiscono gli invarianti, quattro sono appunto quelle da cui dipende la determinazione degli invarianti puntuali: ne segue che noi possiamo approfittare della ricerca già istituita per questi ultimi invarianti, onde giungere più presto alla integrazione delle sette equazioni. Ne segue anche che sussiste per gli invarianti rispetto alle trasformazioni di contatto la proprietà di essere di peso zero.