ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Matematica. — *Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese.* Nota di A. Schoenflies, presentata a nome del Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Storia della matematica. — *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva.* Nota di Gino Loria, presentata a nome del Socio Cremona.

Di Evangelista Torricelli sono assai noti tre scritti pubblicati a Firenze nel 1644 sotto il titolo di *Opera Geometrica*: qual ne sia il valore è dimostrato dal contenere uno di essi quelle ricerche sulla cicloide che al di là delle Alpi tanta invidia destarono e sì fiera polemica fecero divampare, e dal fatto che un altro bastò a mettere in luce come il ben noto metodo delle tangenti che dal Roberval prende nome, sia stato immaginato, indipendentemente dal celebre professore di Parigi, dal più geniale dei discepoli di Galileo [1]. Molte altre opere compose il Torricelli; e quando nel 1647 a soli trentanove anni lo colse improvvisamente la morte, egli ordinò [2] che la cura delle pubblicazioni di esse fosse affidata a Bonaventura Cavalieri e a Michelangiolo Ricci. Ma la morte del primo accaduta nel medesimo anno 1647, e la preoccupazione della dignità cardinalizia a cui aspirava il secondo (e di cui venne poi effettivamente insignito) vietarono che venissero soddisfatte le legittime aspirazioni del Torricelli. Nè miglior esito ebbero le fatiche che, auspice Ferdinando II Granduca di Toscana, spese attorno ai manoscritti torricelliani, Vincenzo Viviani. Soltanto una raccolta di *Lezioni accademiche* venne nel 1715, benchè in minima parte, a calmare i desiderî di coloro i quali pretendevano che il mondo civile fruisse dei ritrovati di colui, che tanta ammirazione accese in chi lo conobbe, da meritare, vivo, l' epiteto di Archimede della Toscana. Se non che tale pubblicazione ebbe virtù di rendere, per altra ragione, più intensi tali desiderî: giacchè nella prefazione delle *Lezioni accademiche* (anonima, ma che si sa essere di Tommaso Bonaventuri) si legge un *Indice* particolareggiato delle opere inedite del Torricelli, scritto da lui medesimo, dal quale emerge quale immenso contributo avrebbe arrecato alla geometria delle curve e delle su-

[1] F. Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti, detto metodo del Roberval.* (Bullettino di Bibliografia e Storia ecc., t. VIII, 1875, p. 265-304).

[2] V. i documenti pubblicati a p. 58-50 e 63 dell' opuscolo: *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli, precedute dalla vita di lui scritta da Giovanni Ghinassi.* (Faenza, 1864).

perficie la pubblicazione integrale delle sue investigazioni. E quasi per rendere più tormentosa tale brama, il Fabbroni, in appendice al suo elogio del Torricelli ([1]), non soltanto pubblicava un elenco completo delle sue opere edite ed inedite, ma faceva conoscere al mondo degli scienziati l' interessantissimo *Racconto d' alcune Proposizioni proposte e passate scambievolmente tra Matematici di Francia e me dall' anno 1640, in quà* ([2]).

Non è mia intenzione, poichè il luogo nol consente, di esporre qual flutto di sapere geometrico sgorghi da queste pagine: osserverò soltanto come esse provino che il Torricelli abbia scoperte molte delle proprietà generali delle parabole e delle iperboli d' ordine superiore che stanno tra i più bei titoli di gloria del Fermat e del Wallis, e che egli abbia avvertita ([3]) quella relazione interessante fra l' arco di una parabola qualunque e l' arco di una spirale convenientemente scelta che va nella storia della geometria col nome di Fermat ([4]).

Ma nel *Racconto* medesimo vi è un passo che, se non m' inganno possiede una eccezionale importanza, e sul quale i biografi del Torricelli non fissarono a sufficienza l' attenzione degli storici della matematica. Reputo perciò necessario di qui riferirlo per farlo seguire da qualche parola di commento:

« Fu da me ritrovata un' altra sorte di spirali maravigliose, delle quali dò la definizione per via del moto, ed in un' altra maniera. Tralascio la definizione del moto, e darò l' altra per via delle medie proporzionali.

Definizione. Sia (fig. 1) una linea retta AC segata in B in qualunque maniera, e si alzi la perpendicolare BD media proporzionale tra AB, BC. Di più

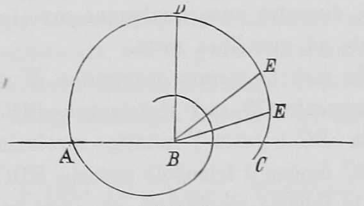

FIG. 1.

seghisi l' angolo DBC per mezzo della BE, che sia media proporzionale tra

([1]) *Vitae Italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII* et *XVIII floruerunt.* t. I, (Pisis, MDCCLXXVIII), p. 345-372

([2]) Di tal racconto l' esistenza ed un passo erano noti a tutti coloro che lessero l' opuscolo di Carlo Dati intitolato: *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate della vera storia delle cicloide, e della famosissima esperienza dell' argento vivo.* (Firenze 1662): v. specialmente p. 18 e 26.

([3]) Cfr. anche una lettera scritta dal Torricelli a Michelangiolo Ricci il 24 Agosto 1644 e pubblicata dal Ghinassi (l. c. p. 18).

([4]) *Oeuvres de Fermat publiés par les soins de P. Tannery et C. Henry,* t. I, (Paris, 1894), p. 203; t. II, (Paris, 1894), p. 441 e t. III, (Paris, 1896), p. 178.

DB, BC. E di nuovo seghisi l' angolo DBC per mezzo della BF, la quale sia media tra DB, BE e così si faccia sempre segandosi per mezzo gli angoli con linee medie proporzionali.

Se si troveranno molti punti come A, D, F, E, C ecc. per i quali passerà una linea spirale chiamata geometrica, la quale fra l' altre ha questa proprietà, che avanti di arrivare al suo centro B deve fare intorno ad esso infinite rivoluzioni, nulla di meno questa linea quantunque sia curva e composta d' infinite rivoluzioni, si prova eguale ad una linea retta, come nel presente teorema dirò.

Teorema I. Se sarà (fig. 2) CO tangente della spirale geometrica, il cui centro sia B, e l' angolo CBO sia retto, sarà la tangente istessa CO eguale

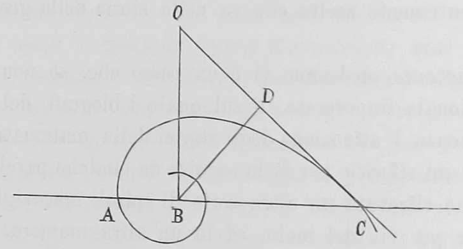

Fig. 2.

a tutta la linea spirale, cominciando dal contatto C fino al centro B, non ostante ch' ella sia composta d' infinite revoluzioni.

Teorema II. Si dimostra anco qualunque arco, ovvero parte della spirale geometrica eguale ad una linea retta.

Teorema III. Se sarà la spirale geometrica di cui sia centro B massimo raggio BC, e tangente CO sarà il triangolo BOC doppio dello spazio contenuto tra la retta BC e tutte l' infinite revoluzioni della spirale, ovvero se sulla base BC faremo il triangolo isoscele BDC, questo sarà uguale allo spazio di tutte le infinite revoluzioni ec. *idem enim est etc.* ».

La definizione ora riferita, se serve a costruire infiniti punti della « spirale geometrica », non li somministra tutti; ma a questa mancanza sopperisce « la definizione per via del moto » che leggesi nell' *Indice* dianzi citato sotto la seguente forma:

» In Spiralibus vero quarum radii, temporibus aequalibus in geometrica ratione procedunt, ostendetur ipsam spiralium lineam, licet ex infinitis numero ravolutionibus constet, antequam ad suum centrum perveniat, suae tangenti aequalem esse. Spatium vero etsi infinitis numero revolutionibus componatur, cuidam triangulo isosceli aequale demonstrabitur, cujus trianguli lateribus, ipsa etiam spiralis linea aequalis apparebit » (1).

(1) *Lezioni accademiche d' Evangelista Torricelli.* (Firenze, MDCCXV), p. XLI.

Da questo passo scaturisce ad evidenza che *la spirale geometrica di Torricelli non è che l' ordinaria spirale logaritmica*, cioè la curva rappresentata da un' equazione della forma seguente:

$$(1) \qquad \varrho = a\, e^{b\varphi}$$

È il Torricelli l' inventore di questa curva? Per rispondere a tale domanda notiamo in primo luogo che non è possibile determinare esattamente l' epoca in cui il nostro connazionale concepì e studiò la curva di cui è parola, essendoci giunta senza data la lettera a Pietro Carcavy che ad essa si riferisce (1). Ricordiamo in secondo luogo che come inventore della spirale logaritmica si suole (2) ordinariamente considerare Descartes, il quale ne tenne parola in una lettera scritta al P. Marsenne addì 12 settembre 1638 (3), considerandola come trajettoria obliqua di un fascio di raggi, e tal modo di considerare la curva sembra essersi conservato dal momento che, assai più tardi, Giacomo Bemoulli osservava che « ipsam etiam esset loxodromia, si terra plana foret » (4). Quella lettera di Descartes fu stampata soltanto nel 1667, cioè vent' anni dopo la morte del Torricelli; ma, vista la corrispondenza epistolare esistita tra Torricelli ed il P. Mersenne, nulla abilita ad escludere che questi abbia comunicato a quegli la osservazione dell' autore del *Discours de le méthode*; in tal caso il merito di Torricelli si ridurrebbe ad avere operato una notevole trasformazione della definizione della spirale logaritmica in altra che, senza alcuna integrazione, dà la equazione polare della curva. Tale trasformazione è abbastanza importante per essere ascritta tra le benemerenze del Torricelli: tuttavia io penso che il Torricelli non l' abbia effettuata, ma sia giunto direttamente solo alla spirale logaritmica. Lo credo in primo luogo perchè nell' *Indice* già due volte ricordato, tra le nuove curve da lui studiate si trovano « spiralium plura genera » (5);

(1) Ghinassi, op. cit., p. 53-54. Ivi si legge: « Trovai anco un' altra sorta di spirali (che con un semplicissimo instrumento facilissimamente si descrivono prossime alle vere) le quali si dimostrano eguali a linee rette. Mando solamente per ora alcuni disegni di esse e poi manderò un' altra volta anco la definizione che ho in tre modi, ma non ho risoluto quale di essi io debba eleggere. Accennerò solamente che se le spirali di Archimede sono infinite di numero e tali che tra di loro non sono differenti se non in grandezza, le mie spirali sono infinite di numero e non sono differenti fra di loro se non in ispezie, poichè ogni spezie non contiene altro che una sola spirale la quale non può averne altra nè maggiore nè minore di sè che gli sia simile ».

(2) M. Cantor, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, t. II, (Leipzig, 1892), p. 781.

(3) *Oeuvres de Descartes*, (ed. Cousin.), t. VII, p. 93-94.

(4) *Specimen alterum calculi differentiali*, (Acta erud. Juni 1691, p. 281; Jac. Bernoulli opera omnia, t. I, p. 442).

(5) *Lezioni* citate, p. XL.

lo credo in secondo luogo perchè il Torricelli concepì da sè la logaritmica [1], cioè quella curva che in coordinate cartesiane corrisponde a quella che in coordinate polari ha la equazione (1). « Quella linea che io chiamavo mezza iperbola (scriveva egli a Michelangiolo Ricci, addì 24 Agosto 1644) non è affatto nuova invenzione, come credo che ella avrà conosciuto subito, ma viene autorizzata dal nome di un grande autore e da una invenzione grandissima nelle matematiche. Parlo de Nepero e de' logaritmi dell' una e dell' altra specie, la nascita de' quali con le lor proprietà e dimostrazioni si scorgono manifestamente in quella linea. Insomma quei due moti, uno aritmetico e l' altro geometrico che da Nepero non furono considerati se non separatamente l'uno dall' altro, da me sono stati contemplati unitamente, e ne ho cavato una speculazione di geometria, dove che egli non andava rintracciando altro che una pratica aritmetica » [2].

Sia Torricelli o non inventore della spirale logaritmica, egli è indubbiamente il primo che abbia notato in essa delle proprietà mirabili. I teoremi da lui enunciati possono oggi dimostrarsi con poche linee di calcolo, ma sono egualmente importantissimi: cominciamo dal verificarne le verità.

Dalla equazione (1) emerge che la lunghezza s di un arco di spirale logaritmica contato a partire dal polo è espresso:

$$s = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\, e^{b\varphi} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b^2}\,\varrho\,; \tag{2}$$

ciò prova che la spirale logaritmica è rettificabile, conformemente a quanto asserisce il II dei teoremi surriferiti. — Si osservi poi che:

$$BC = a, \qquad OB = \frac{a}{b}, \qquad OC = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}$$

onde, facendo nella (2) $\varphi = 0$

$$s = CO$$

come dice il I di quei teoremi. — Finalmente l' area descritta dal raggio vettore è data in generale da

$$\frac{a^2}{4b}e^{2b\varphi}\,;$$

(1) Di tal curva si ignora il primo inventore (Cantor, op cit, t. III, p. 223, si limita a osservare che Huygens ne parla come di una linea nota nel *Discours de la cause de la pesanteur*, pubblicato nel 1690 in appendice al *Traité de la lumière*); forse è Torricelli stesso.

(2) Ghinassi, op. cit., p. 17.

onde, per $\varphi = 0$, si ottiene

$$\frac{a^2}{4b} = \frac{1}{2}\,\frac{OB\,.\,BC}{2} = \frac{1}{2}\ \text{triangolo OBC},$$

d' accordo col contenuto dell' ultimo dei teoremi anzidetti.

Di questi teoremi il più importante è indubbiamente il II (di cui il I non è che un corollario). Per convincersi del suo valore si rammenti che il problema della rettificazione di una curva è uno di quelli che spezzarono gli strumenti d' indagine degli antichi geometri, in cospetto del quale lo stesso Archimede dovette dichiararsi vinto; tale problema è così arduo che parve, ed era, memorabile scoperta quella dell' eguaglianza di un arco di parabola e di un arco di spirale archimedea, avvertita dal Roberval (1) e dimostrata da Pascal (2). Si ritiene ordinariamente (3) che la prima curva per la quale tal problema fu sciolto sia la parabola semicubica, e che questa osservazione sia stata fatta circa nello stesso tempo da Neil (1657), von Heuraët (1659) e Fermat (1660). Siccome di tal ritrovato non si ebbe notizia che più di un decennio dopo la morte del Torricelli, così parmi essere autorizzato a concludere che

1° *gli è ad Evangelista Torricelli che si deve la prima rettificazione di una curva,*

2° *la prima linea non retta che venne esattamente rettificata è, non già la parabola semicubica, ma la spirale logaritmica.*

Quello che resterebbe a vedere e sarebbe interessantissimo conoscere è la catena di ragionamenti, mediante cui Torricelli arrivò alle conclusioni testè indicate; essa cesserebbe di essere un segreto per la generalità dei dotti ove fossero finalmente tolti dagli archivi e stampati i lavori di lui intitolati: *De infinitis spiralibus* e *Trattato delle spirali* (4); è questo un nuovo motivo di associarsi al voto espresso dal più recente dei biografi del Torricelli quando scrisse: « Quest' uomo di sì meraviglioso e vario ingegno non ha sulla pietra che chiude le sue ossa neppure sculto il suo nome, e la più parte delle sue opere giacciono ancora senza l' onore a tanti largito di quella luce che avrebbe mostrato appieno quale e quanto si fosse » (5). E tal voto, che era pur quello del Torricelli, è bene ripetere all' approssimarsi nel terzo centenario della nascita del sommo che apparve ai suoi contemporanei come Galileo redivivo (6).

(1) V. una lettera scritta da F. de Verdus a Torricelli il 21 Maggio 1644 e pubblicata dal Boncompagni nel t. VIII, (1875, p. 448) del *Bollettino di Bibliografia, Storia*, ecc.

(2) *Oeuvres de Pascal*, t. V, (La Haye, 1775), p. 441.

(3) Cfr. Christensen, *The first determination of a length of a curve.* (Bibliotheca mathematica, 1887, p. 76-80).

(4) Ghinassi, l. c. p. XL e XLIII.

(5) Ghinassi, l. c., p. XXXII.

(6) Si ricordi infatti l'anagramma: *En virescit Galilaeus alter* (= Evangelista Torricelli).