ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia per la seduta del 19 dicembre 1897.

Matematica. — *Sugli spazii a curvatura costante.* Nota del dott. Remigio Banal, presentata dal Socio Beltrami.

§ 1. Col nome di *spazii a curvatura costante* si sogliono indicare le due varietà a tre dimensioni, d'elemento lineare:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2} \qquad (a = \text{cost.}) \tag{1}$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (a = \text{cost.}) \tag{2}$$

a curvatura costante positiva la prima (spazio di Riemann), a curvatura costante negativa la seconda (spazio di Lobatschewsky). Ma questo nome appartiene altresì ad un'altra varietà, fin qui, ch'io mi sappia, non studiata, definita dall'aver due curvature eguali e costanti e la terza nulla; ad essa fu, per la prima volta dal mio maestro prof. Gregorio Ricci [1], assegnata per l'elemento lineare la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2} + (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2) \qquad (c = \text{cost.}) \tag{3}$$

e da me l'altra:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2(x^2 + y^2 + z^2)}. \tag{4}$$

[1] Ricci, *Di un punto della teoria delle forme differenziali quadratiche ternarie;* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. V. In questa Memoria l'autore si propone di determinare le condizioni affinchè in una varietà a tre dimensioni esistano uno o più sistemi tripli ortogonali di superficie a due dimensioni intersecantisi secondo linee di curvatura della varietà stessa. Fra le varietà nelle quali esistono infiniti di tali sistemi, trovasi appunto quella d'elemento lineare (3). — In una mia Memoria, comparsa nell'annata 1896 degli Annali di Matematica pura e applicata, nella quale mi proposi di determinare tutte le varietà con due curvature eguali e la terza nulla, ritrovo la (3) e ne do qualche cenno.

Io mi propongo qui di constatare la sostanziale diversità geometrica fra questo, che io chiamo *spazio di Ricci* (1), e gli spazî di Riemann e di Lobatschewsky. Il punto saliente di tale diversità sta, a mio avviso, in ciò che mentre questi ultimi non sono deformabili, cioè sono solo suscettibili di moti rigidi nello spazio piano a quattro dimensioni che li contiene, avviene il contrario del primo, il quale ammette tante configurazioni, quante ne ammette nello spazio euclideo la sfera a due dimensioni; essendovi anzi corrispondenza univoca e reciproca fra ciascuna configurazione dell'uno e ciascuna dell'altra. Di ciò mi occupo nei primi sette paragrafi. Nell'ottavo stabilisco una estensione di queste proprietà ad un'altra classe di superficie ch'io ebbi occasione di studiare nella Memoria citata.

Meriterebbe di mettere in rilievo l'interesse che possono avere queste considerazioni sul problema, tanto importante e tanto poco studiato, della deformazione della sfera; ma ciò, che oltrepasserebbe i limiti e lo scopo di questo, spero poter fare in altro lavoro.

I.

La deformabilità degli spazî di Riemann e di Lobatschewsky.

§ 2. Affinchè una forma differenziale quadratica

$$\varphi = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

a discriminante $|a|$ positivo, possa rappresentare l'elemento lineare di una varietà a tre dimensioni immersa nello spazio piano a quattro dimensioni, si richiede e basta che esista una seconda forma

$$\psi = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

i cui coefficienti soddisfino alle equazioni algebriche

$$\text{(A)} \qquad |a| \,.\, \alpha^{(rs)} = b_{r+1\, s+1}\, b_{r+2\, s+2} - b_{r+1\, s+2}\, b_{r+2\, s+1} \quad (2).$$

(1) Il Ricci dà a questa varietà il nome di *cilindro retto a tre dimensioni*. Certamente vi sono molte analogie tra essa e le superficie cilindriche a due dimensioni dello spazio euclideo; ma v'è una diversità sostanziale: la varietà (3) non è sviluppabile sullo spazio piano. Tale denominazione quindi converrebbe forse meglio ad una varietà con due curvature nulle e la terza costante. Cfr. anche Killing, *Die nicht-euklidischen Raumformen*, § 12. — Comunqne ciò che importa è questo: la varietà (3) non è applicabile su alcuna delle varietà note. Ciò è sufficiente a stabilire l'interesse di queste ricerche.

(2) In questa formola e nelle successive considereremo come identici due indici che differiscano per un multiplo di 3.

e alle equazioni differenziali

(B) $$b_{rst} = b_{rts}$$

dove è posto

(5) $$|a| \, . \, \alpha^{(rs)} = \frac{d a_{r+1\, s+1\, , r+2}}{d x_{s+2}} - \frac{d a_{r+1\, s+2\, , r+2}}{d x_{s+1}} + \\ + \sum_{hk} a^{(hk)} \left(a_{r+1\, s+2, h} \, a_{s+1\, r+2, k} - a_{r+1\, s+1, h} \, a_{r+2\, s+2, k} \right)$$

(6) $$a_{rs,t} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{d a_{rt}}{d x_s} + \frac{d a_{st}}{d x_r} - \frac{d a_{rs}}{d x_t} \right)$$

(7) $$b_{rst} = \frac{d b_{rs}}{d x_t} - \sum_p a^{(pq)} \left(a_{rt,p} \, b_{sq} + a_{st,p} \, b_{rq} \right)$$

Le $\alpha^{(rs)}$ sono note col nome di *simboli di Riemann*, le $a_{rs,t}$ col nome di *simboli di Christoffel* relativi alla forma φ, e le b_{rst} sono le derivate covarianti [1] rispetto a φ degli elementi del sistema b_{rs}. Le (A) e (B) chiamansi *equazioni fondamentali* della varietà φ, e costituiscono la generalizzazione delle note equazioni di Gauss e di Mainardi-Codazzi.

Come per una superficie a due dimensioni, la geometria di una varietà a tre dimensioni è già perfettamente definita dall'espressione φ del suo elemento lineare. Tutte le proprietà di essa che non si alterano col deformarla, dipendono soltanto dai coefficienti di φ, e reciprocamente; la forma ψ interviene soltanto a determinare ciascuna delle configurazioni di cui la varietà è suscettibile. Ora è da notare come le equazioni (A) definiscano i coefficienti di ψ in funzione delle $\alpha^{(rs)}$, e quindi dei coefficienti di φ, in tutti i casi nei quali il determinante $|b|$ è diverso da zero. Quindi: *Una varietà a tre dimensioni, per cui il discriminante della seconda forma fondamentale sia diverso da zero, non ammette che un'unica configurazione.*

Un'interpretazione geometrica semplice e importante dell'annullarsi del determinante $|b|$ si ottiene considerando l'equazione

$$\begin{vmatrix} b_{11} + \omega a_{11} & b_{21} + \omega a_{21} & b_{31} + \omega a_{31} \\ b_{12} + \omega a_{12} & b_{22} + \omega a_{22} & b_{32} + \omega a_{32} \\ b_{13} + \omega a_{13} & b_{23} + \omega a_{23} & b_{33} + \omega a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

le cui radici $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rappresentano le tre curvature principali della varietà considerata. Sviluppandone il primo membro, la si ottiene sotto la forma:

$$\omega^3 + \omega^2 \sum_{1}^{3}{}_{rs} \, a^{(rs)} \, b_{rs} + \omega \sum_{1}^{3}{}_{rs} \, a_{rs} \, \alpha^{(rs)} + \frac{|b|}{|a|} = 0 \, ,$$

[1] V. Ricci, *Résumé de quelques travaux sur les systèmes* ecc. Bulletin de Sciences math., giugno 1892.

dalla quale si riconosce che i tre invarianti

$$\sum_{rs} a^{(rs)} b_{rs}\,; \quad \sum_{rs} a_{rs}\, \alpha^{(rs)}\,; \quad \frac{|b|}{|a|}$$

presi il primo ed il terzo con segno — e il secondo con segno +, rappresentano rispettivamente le quantità

$$\begin{array}{ll} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 & (\textit{curvatura media}) \\ \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 & (\textit{curvatura di Gauss}) \\ \omega_1\omega_2\omega_3 & (\textit{curvatura totale}) \end{array}$$

della varietà considerata. Perciò, se si tien anche conto che l'espressione della curvatura di Gauss dipende soltanto dai coefficienti dell'elemento lineare, potrà dirsi che:

Affinchè una varietà a tre dimensioni sia deformabile, deve avere eguale a zero la curvatura totale. Verificata tale condizione, ogni sua deformata sarà pure a curvatura totale nulla, e conserverà in ogni punto per la curvatura di Gauss i valori che questa assume nei punti della varietà data.

Ma è noto che la condizione citata non è sufficiente. Della ricerca delle ulteriori condizioni che, nel caso generale, devono ancora essere soddisfatte, si occupa altro mio lavoro. Qui ci limiteremo ad esporre alcune considerazioni sulle varietà a curvatura costante nominate sopra.

§ 3. Premettiamo alcune formole che semplificheranno assai i calcoli successivi. Si consideri l'elemento lineare

$$ds^2 = \mathrm{H}^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

nel quale H indica una funzione di x_1, x_2, x_3 finita e diversa da zero assieme alle sue derivate prime e seconde. Proponiamoci di esprimere i simboli di Christoffel e di Riemann relativi a tale elemento per mezzo di queste derivate, nel modo più semplice. Eseguendo nei secondi membri delle (6) le sostituzioni

$$a_{rr} = \mathrm{H}^2\,; \quad a_{rs} = 0\,, (r \lesseqgtr s)\,,$$

otteniamo immediatamente per i simboli di Christoffel le espressioni seguenti:

$$a_{rs,t} = 0\,; \quad a_{rs,r} = -\,a_{rr,s} = \mathrm{H}\frac{d\mathrm{H}}{dx_s}\,; \quad a_{rr,r} = \mathrm{H}\frac{d\mathrm{H}}{dx_r}$$

con r, s, t distinti.

Partendoci dalle (5), osservando che

$$|a| = \mathrm{H}^6\,; \quad a^{(rr)} = \frac{1}{\mathrm{H}^2}\,; \quad a^{(rs)} = 0\,,$$

e giovandoci delle precedenti, giungiamo con facili calcoli alle seguenti espressioni per i simboli di Riemann:

$$H^6 \,.\, \alpha^{(rr)} = -H\frac{d^2H}{dx_{r+1}^2} - H\frac{d^2H}{dx_{r+2}^2} - \left(\frac{dH}{dx_r}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dx_{r+1}}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dx_{r+2}}\right)^2$$

$$H^6 \,.\, \alpha^{(rs)} = H\frac{d^2H}{dx_r\,dx_s} - 2H\frac{dH}{dx_r}\frac{dH}{dx_s}\,,\ (r \lessgtr s)$$

e si riconosce facilmente che esse possono mettersi sotto la forma:

$$H^3\,\alpha^{(rr)} = \frac{d^2\,H^{-1}}{dx_{r+1}^2} + \frac{d^2\,H^{-1}}{dx_{r+2}^2} - H\sum\nolimits_r \left(\frac{dH^{-1}}{dx_r}\right)^2$$

$$H^3\,\alpha^{(rs)} = -\frac{d^2\,H^{-1}}{dx_r\,dx_s}\,,\ (r \lessgtr s)\,.$$

che è la richiesta.

Cio premesso, calcoliamo per mezzo delle formole ora trovate i simboli di Riemann per gli elementi lineari (1), (2) e (4). Nei tre casi devesi fare in esse rispettivamente

$$H^{-1} = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2} \quad \text{per lo spazio di Riemann;}$$

$$H^{-2} = \frac{z}{a} \quad \text{per lo spazio di Lobatschewsky;}$$

$$H^{-1} = c(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{per lo spazio di Ricci.}$$

Eseguendo i calcoli troviamo:

$$\alpha^{(rr)} = \frac{1}{a^2}\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2;\ \alpha^{(rs)} = 0 \quad \text{per lo spazio di Riemann}$$

$$\alpha^{(rr)} = -\frac{1}{a^2}\frac{z^2}{a^2} \quad ;\ \alpha^{(rs)} = 0 \quad \text{per lo spazio di Lobatschewsky}$$

$$\alpha^{(rr)} = c^4\,x_r^2 \quad ;\ \alpha^{(rs)} = c^4 x_r x_s \quad \text{per lo spazio di Ricci}$$

dalle quali discende che il valore del determinante $|\alpha|$ è rispettivamente

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2 + y^2\,z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^6;\qquad -\frac{1}{a^6}\frac{z^6}{a^6};\qquad 0\,,$$

per le tre varietà considerate.

Se si considera ora che, come si deduce dalle (A), e da teoremi sui determinanti reciproci, l'annullarsi del determinante $|\alpha|$ trae con sè quello del determinante $|b|$ e inversamente, e se si ricorda un teorema del precedente paragrafo, potrà asserirsi che:

Lo spazio di Riemann e quello di Lobatschewsky non sono deformabili.

Essi non possono assumere dunque, senza uscire dallo spazio piano a quattro dimensioni che li contiene, che movimenti rigidi; e tali sono ad es. quei movimenti dello spazio di Riemann, già studiati da parecchi geometri [1], che sono noti col nome di *scorrimenti*, caratteristica dei quali è che tutti i punti, eseguito il movimento, hanno la medesima distanza dalle loro rispettive posizioni iniziali.

Per concludere sulla deformabilità dello spazio di Ricci, occorrono però ulteriori considerazioni, che formeranno oggetto dei paragrafi seguenti.

Notiamo ancora come dalle (A) si possano dedurre, per $|b|$ diverso da zero, le formole:

$$a^3 |\alpha| = |b|^2$$
$$|b|\, b_{rs} = |a|^2 \left(\alpha^{(r+1\, s+1)}\, \alpha^{(r+2\, s+2)} - \alpha^{(r+1\, s+2)}\, \alpha^{(r+2\, s+1)}\right)$$

per mezzo delle quali si possono calcolare, per gli spazî di Riemann e di Lobatschewsky, le b_{rs} e conseguentemente le espressioni delle loro curvature totale e media, che risultano entrambe costanti e diverse da zero.

La curvatura di Gauss G invece, tanto per gli spazî di Riemann e di Lobatschewsky, come per quello di Ricci, si può avere calcolando l' invariante $\sum_{rs} a_{rs}\, \alpha^{(rs)}$ per mezzo delle espressioni delle $\alpha^{(rs)}$ testè ottenute. Così ad es. si trova subito che

Lo spazio di Ricci è a curvatura di Gauss costante e positiva $= c^2$.

Matematica. — *Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese.* Nota di A. Schoenflies, presentata a nome del Socio Cremona.

1. Des études approfondies des nombres transfinis de Mr. Veronese m'avaient conduit au résultat que ces quantités ne permettent pas à tout égard la multiplication, ainsi qu'il n'existe pas pour eux la géometrie projective [2]. Mr. Veronese, dans une Note qui vient de paraître [3], prétend que mon avis soit erroné; il dit que les quantités alléguées par moi ne font pas partie du système de ses nombres, et que, par cette raison, mes raisonnements ne touchent pas sa théorie. Cependant, il n'en a pas donné aucune démonstration [4].

Voici les remarques qu'il me faut y opposer. D'abord je pourrai citer Mr. Veronese contre lui-même; dans une Note des *Fondamenti* on trouve les mots suivants [5]:

(1) V. p. es. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.* Annali di Matematica pura e applicata, 1896.

(2) Jahresber. d. deutsch. Math. Vereinig. V, pag. 75.

(3) Questi Rendiconti (5), VI, pag. 161.

(4) Voir aussi § 4 de cette Note.

(5) *Fondamenti di geometria,* pag. XXVI della prefazione.