ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1897

Essi non possono assumere dunque, senza uscire dallo spazio piano a quattro dimensioni che li contiene, che movimenti rigidi; e tali sono ad es. quei movimenti dello spazio di Riemann, già studiati da parecchi geometri [1], che sono noti col nome di *scorrimenti*, caratteristica dei quali è che tutti i punti, eseguito il movimento, hanno la medesima distanza dalle loro rispettive posizioni iniziali.

Per concludere sulla deformabilità dello spazio di Ricci, occorrono però ulteriori considerazioni, che formeranno oggetto dei paragrafi seguenti.

Notiamo ancora come dalle (A) si possano dedurre, per $|b|$ diverso da zero, le formole:

$$a^3\,|\alpha| = |b|^2$$
$$|b|\,b_{rs} = |a|^2\,(\alpha^{(r+1\,s+1)}\,\alpha^{(r+2\,s+2)} - \alpha^{(r+1\,s+2)}\,\alpha^{(r+2\,s+1)})$$

per mezzo delle quali si possono calcolare, per gli spazî di Riemann e di Lobatschewsky, le b_{rs} e conseguentemente le espressioni delle loro curvature totale e media, che risultano entrambe costanti e diverse da zero.

La curvatura di Gauss G invece, tanto per gli spazî di Riemann e di Lobatschewsky, come per quello di Ricci, si può avere calcolando l'invariante $\sum_{rs} a_{rs}\,\alpha^{(rs)}$ per mezzo delle espressioni delle $\alpha^{(rs)}$ testè ottenute. Così ad es. si trova subito che

Lo spazio di Ricci è a curvatura di Gauss costante e positiva $= c^2$.

Matematica. — *Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese.* Nota di A. Schoenflies, presentata a nome del Socio Cremona.

1. Des études approfondies des nombres transfinis de Mr. Veronese m'avaient conduit au résultat que ces quantités ne permettent pas à tout égard la multiplication, ainsi qu'il n'existe pas pour eux la géometrie projective [2]. Mr. Veronese, dans une Note qui vient de paraître [3], prétend que mon avis soit erroné; il dit que les quantités alléguées par moi ne font pas partie du système de ses nombres, et que, par cette raison, mes raisonnements ne touchent pas sa théorie. Cependant, il n'en a pas donné aucune démonstration [4].

Voici les remarques qu'il me faut y opposer. D'abord je pourrai citer Mr. Veronese contre lui-même; dans une Note des *Fondamenti* on trouve les mots suivants [5]:

[1] V. p. es. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*. Annali di Matematica pura e applicata, 1896.

[2] Jahresber. d. deutsch. Math. Vereinig. V, pag. 75.

[3] Questi Rendiconti (5), VI, pag. 161.

[4] Voir aussi § 4 de cette Note.

[5] *Fondamenti di geometria*, pag. XXVI della prefazione.

« I nostri numeri infiniti e infinitesimi sono in fondo numeri complessi « speciali con infinite unità, tali però che il prodotto di due di esse non si « esprime linearmente mediante le altre, e perciò per questi numeri vale il « teorema che se il prodotto di due di essi è nullo, deve esser tale anche « uno dei fattori, come vale pei numeri complessi ordinarî e pei quaternioni « di Hamilton ».

Mais je préfère donner, moi-même, une démonstration directe de *l' impossibilité de la multiplication.*

Mr. Veronese a maintenu que les nombres cités dans mon article ([1]) n'appartiennent pas à son système. Cette assertion quand'est-elle fondée? Elle le serait seulement, si Mr. Veronese pouvait démontrer qu'on n'arrive jamais aux quantités de mon article, *quelques fois qu'on soumette les nombres définis par lui aux opérations élémentaires de l'addition et de la multiplication.* Mais il n'est pas possible de donner une telle démonstration; au contraire il est bien facile de voir qu'on n'a besoin que des combinaisons très simples pour parvenir a mes quantités, en opérant avec les quantités contenues dans les *Fondamenti.* Voilà que je n'ai pas cru nécessaire d'en donner l' explication autrefois.

2. Pour bien faire comprendre mes raisonnements, je veux citer textuellement les théorèmes des *Fondamenti* dont il me faut m'occuper.

C'est d'abord le théorème du § 121^e^ qui contient la possibilité de la multiplication:

§ 121^e^ « I numeri reali finiti infiniti e infinitesimi fino all' ordine μ com- « presi tutti quelli i cui ordini sono finiti col numero μ, formano un gruppo « che si trasforma in sè medesimo mediante le operazioni fondamentali appli- « cate a due numeri qualunque del gruppo » (pag. 201).

La définition du nombre transfini μ se trouve à la pag. 107, je la fais suivre comme voici. Remarquons d'abord que Mr. Veronese a formé la série suivante des nombres finis ou infinis:

$$0, 1, 2 \ldots n \ldots \infty_1 - n, \ldots \infty_1 - 1, \infty_1, \infty_1 + 1, \ldots 2\,\infty_1 - 1, 2\,\infty_1, 2\,\infty_1 + 1, \ldots$$
$$\ldots n_1 \infty_1 \pm n_2, \ldots n_1 \infty_1^2 \pm n_2 \infty_1 \pm n_3 \ldots$$

et plus généralement les unités

$$\infty^{\infty_1} \ldots \infty_1^{\infty_1^2} \ldots \infty_1^{\infty_1^m} \ldots \infty_1^{\infty_1^{\infty_1}} \ldots;$$

et nous pouvons dire que μ est un nombre quelconque formé avec les unités nommées. (Voir page 101 et 107). C'est cette classe, qu'il nomme la classe (II), et il en dit:

([1]) Voir § 3 de cette Note.

« Ogni numero di questa classe si può esprimere col simbolo:

$$Z = \infty_1{}^{\mu}\, n_1 + \cdots \pm \infty_1{}^{\mu-1}\, n_2 \pm \cdots \pm \infty_1{}^{m}\, n_{\mu-m+1} \pm \cdots \pm n_{\mu+1}\,,$$

« ove $n_1, n_2, \ldots n_{\mu+1}$ sono numeri qualunque dati della classe I » — c'est à dire des nombres finis et entiers — « che possono essere tutti o in parte $= 0$; « μ è un numero di (I) o uno dei numeri infiniti di (II) ottenuti precedente- « mente dallo stesso simbolo Z ».

En second lieu je cite les passages qui contiennent la définition *arithmétique* des nombres transfinis mais finis, au moyen des unités fondamentales, c'est à dire des unités $\frac{1}{\infty_1}$, $\frac{1}{\infty_1^2}$ etc. Il y en a surtout deux. La première se trouve dans le § 103 où il est question de la construction de la « scala » en partageant les segments par moitié et qui voici:

« Così continuando si ottengono gli elementi della divisione assoluta « per metà nell' unità fondamentale ($A A_1$) che saranno indicati dal simbolo:

$$Z = (A\,A_1)\left[\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n}\right) \pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{2^{n_1}}\right) \pm \cdots\right.$$
$$\cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{2^{n_r}}\right) + \cdots + \frac{m_{\infty_1-r'}}{\infty_1{}^{\infty_1-r'}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1-r')}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_{\infty_1-r'}}^{(\infty_1-r')}}{2^{n_{\infty_1-r'}}}\right) + \cdots$$
$$\left.\cdots + \frac{m_\mu}{\infty^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{2^{n_\mu}}\right)\right],$$

« dove le α non sono tutte zero e sono numeri uguali a 0 e a 1, qualunque « sia n. S' intende che r e r' devono essere numeri finiti dati etc. » (pag. 155).

Ici les nombres n r et r' sont des nombres *finis* et *entiers*; mais pour avoir les nombres transfinis les *plus généraux* il faut que Mr. Veronese se *délivre de cette restriction*. En effet quelques pages plus tard, il donne la définition suivante:

« Def. I. Chiameremo elementi della divisione assoluta successiva per « metà di ($A A_1$) quelli ottenuti colle regole precedenti dal simbolo Z, « quando μ è un numero dato qualunque della classe (II) [1] anche se le n « e le r sono infinite (∞) » (pag. 157).

En outre il me faut citer une partie du § 121 *d*:

[1] Cette classe est analogue à la classe (II) de Mr. Cantor.

« Ogni numero reale positivo [1] può essere rappresentato dal simbolo:

$$Z = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right) \pm \frac{m}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{p^{n_1}}\right) + \cdots$$

$$\pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{p^{n_r}}\right) \pm \cdots \pm \frac{m_{\infty_1 - r_1}}{\infty^{\infty_1 - r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1 - r_1)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_{\infty_1 - r_1}}^{(\infty_1 - r_1)}}{p^{n_{\infty_1 - r_1}}}\right)$$

$$+ \cdots \frac{m_\mu}{\infty_1^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{p^{n_\mu}}\right)$$

« ove p è un numero finito intero positivo qualunque, le α sono uguali a « $0, 1, 2 \ldots p-1$; le n e le r ecc. sono numeri interi positivi finiti dati « oppure infiniti ($n = \infty$) e μ è dato o infinito in senso assoluto ($\mu = \Omega$) » (pag. 199).

Il est bon de remarquer que les m sont toujours des nombres finis (voir p. e. pag. 107) et que Ω est analogue au premier nombre de la classe troisième de Mr. Cantor.

Enfin je cite un exemple donné par Mr. Veronese pour le théorème précédent. D'ailleurs c'est le *seul* exemple de ce genre contenu dans les *Fondamenti*; mais *il fera voir tout clairement comment les théorèmes et les nombres doivent être compris.* Cet exemple donne l'expression de $\frac{1}{\infty_1 - m}$ dans la forme Z, c'est à dire au moyen des unités $\frac{1}{\infty_1}$, $\frac{1}{\infty_1^2} \cdots \frac{1}{\infty_1^\mu}$, comme il suit (pag. 200):

$$\frac{1}{\infty_1 - m} = \left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\infty_1{}^{n+1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1{}^{\infty_1 - n}} + \frac{m^n}{\infty_1{}^{\infty_1 - n + 1}} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1{}^{\infty_1}} + \cdots\right) + \cdots + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1{}^{\mu - n}} + \frac{m^n}{\infty_1{}^{\mu - n + 1}} + \cdots + \frac{m^{n + m_1 + 1}}{\infty_1{}^{\mu - n + m_1}} + \cdots\right)$$

$$\mu = \Omega .$$

Je remarque que nécessairement la seconde parenthèse doit contenir aussi les fractions aux dénominateurs $\infty_1{}^{\infty_1 - n - 1}$, $\infty_1{}^{\infty_1 - n - 2}$ ... etc.; sans cela il est impossible, comme le dit Mr. Veronese à l'endroit cité, que le produit du second membre par $\infty_1 - m$ donne le résultat $1 - \frac{m^{2n+2}}{\infty_1{}^\mu}$, si l'on profite des lois élémentaires de la multiplication et qu'on fait finir le second membre par le terme $\frac{m^{2n+1}}{\infty_1{}^\mu}$.

3. Je veux laisser toute critique de ces nombres et de ces théorèmes; je m'occupe seulement de démontrer le contenu de mon article.

[1] Il s'agit seulement des nombres entre 0 et 1.

Des passages des *Fondamenti* cités au-dessus, il s'ensuit immédiatement que

$$a_0 + \frac{a_1}{\infty_1} + \cdots + \frac{a_r}{\infty_1{}^r} + \cdots + \frac{a'_{r'}}{\infty_1^{\infty_1 - r'}} + \cdots + \frac{a'_0}{\infty_1^{\infty_1}}$$

est un nombre transfini, si les a_i sont des nombres finis et les r et r' des nombres finis et entiers toujours croissant. Nous multiplions ce nombre par $\infty_1^{\infty_1}$ et nous trouvons d'après les lois données par M. Veronese

$$a_0 \infty_1^{\infty_1} + a_1 \infty_1^{\infty_1 - 1} + \cdots + a_r \infty_1^{\infty_1 - r} + \cdots + a'_r \infty_1{}^{r'} + \cdots + a'_0\,;$$

enfin en faisant l'addition de ces deux nombres *nous aurons une quantité, qui ne permet pas la multiplication par une quantité pareille*, et dont j'ai parlé dans mon article. Voici les expositions de cet article qui s'y rattachent:

« Der Ausdruck

$$Z = a_n \infty^n + \cdots + a_1 \infty + a_0 + \frac{a'}{\infty} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}}{\infty^\nu}$$

« stellt dann und nur dann eine bestimmte transfinite Zahl im Sinne Vero-
« nese's dar, wenn sich zu jedem gegebenen Index n oder ν der zugehörige
« Coefficient a_n resp. $a^{(\nu)}$ als gewöhnliche endliche positive oder negative
« Zahl bestimmt angeben läfst. Man sieht nun sofort, dafs Addition und
« Subtraction zweier bestimmter transfiniter Zahlen stets ausführbar sind, auch
« gelten die Gesetze der Addition resp. Subtraction ungeändert fort. Anders
« steht es jedoch mit der Multiplication, sobald die zu multiplicirenden Zahlen

$$A = \cdots a_n \infty^n + \cdots + a_1 \infty + a_0 + \frac{a'}{\infty} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}}{\infty^\nu} + \cdots$$

$$B = \cdots b_m \infty^m + \cdots + b_1 \infty + b_0 + \frac{b'}{\infty} + \cdots + \frac{b^{(\mu)}}{\infty^\mu} + \cdots$$

« allgemein sind, d. h. nach beiden Seiten sich ins Unendliche erstrecken.
« An und für sich ist es natürlich gestattet, als Product von A und B eine
« Zahl

$$C = \cdots c_r \infty^r + \cdots + c_1 \infty + c_0 + \frac{c'}{\infty} + \cdots + \frac{c^{(\rho)}}{\infty^\rho} + \cdots$$

« so zu definiren, dafs man für jeden Coefficienten c_λ ein Bildungsgesetz ge-
« mäfs einer Functionalgleichung

$$c_\lambda = f_\lambda(a, b)$$

« statuirt und dieses Bildungsgesetz näher zu bestimmen sucht. Aber da dieses
« Gesetz doch für alle betrachteten transfiniten Zahlen das gleiche sein mufs,
« so mufs es auch gelten, wenn von den transfiniten Zahlen eine oder beide eine

« endliche Zahl von Gliedern haben oder sich nur nach einer Seite ins Unend-
« liche erstrecken. Das Multiplicationsgesetz kann daher kein anderes sein,
« als das triviale, wonach die Einheiten sich wie Potenzen multipliciren und
« die Zahlen selbst wie ganze Functionen dieser Einheiten. In Wirklichkeit
« ist dies auch das Gesetz, mit dem Veronese wie mit etwas selbstver-
« ständlichem operirt (vgl. z. B. § 93). Wenn nun aber die beiden Zahlen A
« und B mit unendlich vielen Einheiten gebildet sind und sich überdies
« nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken, so stellen sich die c_r durch
« ein Aggregat von unendlich vielen Producten $a_k b_l$ dar und können
« daher nicht in der genannten Weise angegeben werden. Die Multiplica-
« tion ist daher innerhalb des zu Grunde gelegten Gebiets
« nicht allgemein ausführbar.

4. Je crois bien qu'on connaîtra clairement que les passages précédents de mon article cité sont tout à fait exactes; pour avoir les nombres les plus simples, j'ai laissé de côté les puissances $\infty_1 - r_1$ etc. D'ailleurs je remarque expressément que mes objections ne se sont jamais dirigées contre les considérations aussi subtiles qu'importantes que Mr. Veronese a publiées sur l'axiome d'Archimède. Ni mes objections ne touchent non plus les théorèmes réimprimés dans la Note dernière de Mr. Veronese; il est clair que ces théorèmes existent dans la même forme pour la théorie ordinaire du nombre irrationel. Mais *voilà que ces théorèmes ne prouvent rien pour la question si les nombres transfinis permettent la multiplication* ou si Mr. Veronese en a donné une preuve.

Dans le passage cité de mon article j'ai dit qu'il est bien permis d'introduire le produit A B comme un nombre en définissant directement le nombre C par l'équation C = AB. Voilà le sens qu'il faut aussi attribuer au passage cité en haut [1] où Mr. Veronese définit les nombres transfinis comme des nombres complexes à unités infinies. En effet, soit pour $i = 1, 2 \ldots n \ldots$

$$A = \Sigma\, \alpha_i\, e_i\,,\quad B = \Sigma\, \beta_i\, e_i$$

et posons

$$C = AB = \Sigma\, \alpha_i\, \beta_k\, e_i\, e_k\,.$$

Si maintenant nous supposons, qu'il soit toujours $e_i\, e_k = e^1_\iota$. où e^1_ι est une unité nouvelle, il est clair que de l'équation $C = 0$ il s'ensuit $A = 0$ ou $B = 0$. Mais il faut dire qu'un nombre C introduit comme voici, existe en soi-même seulement par raison de notre *volonté*; au moins il n'est pas possible de le comparer aux autres nombres et de le sommettre aux lois du calcul.

5. Qu'il me soit permis, d'ajouter encore une remarque sur la démonstration du théorème § 121ᵉ, cité en haut. Dans les *Fondamenti* on en est

[1] Voir § 1 de cette Note.

renvoyé à la démonstration d'un théorème pareil du § 93°. Mais à cet endroit Mr. Veronese dit seulement que pour les produits en question on peut fixer *l'ordre* de l'infini, tandis que l'existence du produit s'entend de soi-même. Aussi dans les autres démonstrations du § 93, l'existence de la somme ou du produit est toujours soutenue par ce seul raisonnement que l'operation avec des segments géométriques donne nécessairement un segment géométrique. Par exemple, pour dériver la loi distributive, il se trouve le passage suivant:

« Se si ha un numero determinato di (II), cioè

$$(1)\qquad \infty_1^{\mu}\, n_1 + \infty_1^{\mu-1}\, n_2 \pm \infty_1^{\mu-m}\, n_m \pm \cdots \pm \infty_1^2\, n_{\mu-1} \pm \infty_1\, n_{\mu} \pm n_{\mu+1}$$

« e lo si moltiplica per un numero η, ciò significa che il numero (1) si somma « η volte » (pag. 121).

Ici η peut être un nombre transfini, par exemple un nombre de la même forme que (1). Il va sans dire *qu'un tel procédé ne peut pas servir de fondement suffisant pour le calcul.*

On peut demander pourquoi les nombres transfinis de Mr. Cantor permettent la multiplication, tandis que les nombres de Veronese n'en ont pas. La cause en est le symbole $\infty - m$, introduit par Mr. Veronese et — il faut le dire — nécessairement démandé par sa définition de la droite. La même chose forme la différence entre les nombres de Veronese et ceux de Mr. Levi Civita. Aussi la même chose donne-t-elle la raison pourquoi chez Veronese *toutes les lois* de la multiplication continueraient à valoir, tandis que les types d'ordres « (Ordnungstypen) » de Mr. Cantor obéissent seulement aux lois associatives.

Fisica. — *La magnetizzazione dell' argilla colla cottura in relazione colle ipotesi sulla fabbricazione del vasellame nero etrusco.* Nota del dott. G. Folgheraiter, presentata dal Socio Blaserna.

È noto, che l' argilla naturale non è punto magnetica, od almeno lo è tanto poco, che avvicinata ad un piccolo ago calamitato liberamente sospeso ad un lungo e sottilissimo filo senza torsione (di cui si possano vedere le deviazioni dalla posizione normale con cannocchiale e scala), non esercita su di esso alcuna sensibile azione. Anche dopochè l' argilla naturale è stata collocata in un energico campo magnetico uniforme, non mostra alcuna azione sull' ago. Invece se l' argilla viene riscaldata ad elevata temperatura, essa diventa una calamita permanente ed in molti casi anche abbastanza forte: di più essa perde la sua plasticità, ed ha luogo la dissociazione del suo carbonato di calce ecc.