ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

il vaso. Anche le membranelle che chiudono le maglie dei setti trasversali non tardano a scomparire nei vasi delle radici e nella maggior parte di quelli del caule, formandosi allora veri vasi pervii; solo in alcuni casi anche nello stato adulto il riassorbimento non avviene ed allora i vasi restano impervii.

Nel caule delle *Dioscorea* da noi studiate, che come è noto è volubile, il processo di differenziazione dura a lungo, poichè la regione in accrescimento dell' apice vegetativo è molto estesa e comprende numerosi internodî; cosichè, pur non avendo noi eseguite misure precise, possiamo tuttavia dire, che l' ispessimento delle pareti degli elementi costitutivi dei grandi vasi comincia soltanto ad una distanza di 10 e più centimetri dall' apice.

Le nostre ricerche ci hanno condotto dunque a trovare nei fasci vascolari delle Dioscoreacee dei vasi prodotti dalla fusione di cellule che sono originariamente uninucleate, ma diventano poi plurinucleate e moltinucleate prima della differenziazione definitiva in vaso. Questi vasi sono quelli di grandi dimensioni, che si riscontrano anche p. es. nelle radici di tutte le Monocotiledoni da noi studiate e dei quali abbiamo, come si è detto, già esposta l' origine. Ma in questi vasi, almeno per le piante che fecero soggetto delle nostre ricerche, sono sempre uninucleate le cellule che si fondono per formarli, come uninucleati sono stati indicati finora tutti i vasi a parete lignificata e scolpita dai ben noti ispessimenti non uniformi. Il caso da noi osservato è dunque finora unico.

Qual' è il valore morfologico di questi vasi delle Dioscoreacee?

Noi non vogliamo pronunciarci in questa Nota su questa questione. Accenneremo soltanto alla omologia, nell' origine, coi vasi laticiferi, le cui cellule sono pure moltinucleate. Ma l' omologia si arresta ben presto, perchè la differenziazione successiva nelle due sorta di fusioni cellulari procede negli ultimi stadii in modo ben differente.

Matematica. — *Sopra la forma degli invarianti differenziali.* Nota del dott. Paolo Medolaghi, presentata dal Socio Cremona.

Il teorema che io dimostro in questa Nota si può considerare come una generalizzazione di quello da me già dimostrato sopra le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di un gruppo continuo. Io ho trovato [1] che queste equazioni hanno la forma:

$$\mathrm{I}_k \left\{ \varpi_1(y_1 \ldots y_n)\,, \ldots \varpi_m(y_1 \ldots y_n)\,;\; \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\,, \ldots \right\} = \varpi_k(x_1 \ldots x_n)\,: \tag{1}$$

ora dirò che le funzioni $\varpi_1 \ldots \varpi_m$ sono le *funzioni caratteristiche* del gruppo. Variando le funzioni caratteristiche si hanno tutti i gruppi simili ad (1).

[1] Annali di Matematica, maggio 1897.

Ricordo ancora che le equazioni

$$I_k \{ z_1 , \dots z_m \,;\, a_{11} , \dots \} = z_k^0$$
$$k = 1 \dots m$$

ottenute dalle (1) cambiando soltanto significato alle quantità che vi intervengono, sono le equazioni finite di un gruppo la cui composizione dipende soltanto dal numero n delle variabili e dall'ordine s delle equazioni di definizione (e che io rappresento perciò col simbolo γ_{sn}).

Ciò posto, il teorema a cui è destinata la presente Nota è il seguente:

Negli invarianti differenziali di ogni gruppo continuo le variabili dipendenti ed indipendenti entrano soltanto sotto le funzioni caratteristiche.

Variando queste funzioni, si passa dagli invarianti differenziali di un gruppo a quelli di tutti i gruppi simili.

Infine, considerando le derivate e le funzioni caratteristiche come argomenti, gli invarianti differenziali altro non sono che gli invarianti (di ordine zero) di gruppi intransitivi con la composizione γ_{sn}.

Sia una trasformazione infinitesima qualunque nelle variabili $x_1 , \dots x_n$:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \,;$$

e distribuiamo le $x_1 \dots x_n$ in due serie: le une, che indicheremo con $u_1 \dots u_p$, si considerino come variabili indipendenti; le rimanenti, che indicheremo con $v_1 \dots v_q$, $(q + p = n)$ come funzioni delle $u_1 \dots u_p$. Conveniamo infine di rappresentare con $w_1 , \dots w_{\mu_s}$ le derivate fino all'ordine s delle v rispetto alle u. Il caso che alcune delle variabili dipendenti od indipendenti non siano trasformate non ha ragione di essere particolarmente considerato; esso corrisponde all'ipotesi che alcune delle ξ_i siano nulle.

Estendendo [1] la Xf alle derivate $w_1 , \dots w_{\mu_s}$, si ottiene una trasformazione della forma:

$$Xf + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n}^{0 \dots s} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \xi_i}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} \overline{X}_{i, \nu_1 \dots \nu_n} \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n \leqq s)$$

in cui le $X_{i, \nu_1 \dots \nu}$ sono trasformazioni infinitesime nelle sole variabili $w_1 \dots w_{\mu_s}$ e che non dipendono in nessun modo dalle funzioni $\xi_1 \dots \xi_n$.

Le trasformazioni $\overline{X}_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ generano per loro conto un gruppo [2] nelle variabili $w_1 , \dots w_{\mu_s}$; ora è importante notare che la composizione di questo gruppo dipende soltanto dal numero complessivo n delle variabili $x_1 \dots x_n$ e dall'ordine s della estensione; non dipende affatto dalla scelta delle va-

[1] *Theorie der Transformationsgruppen.* Abschnitt. I, Capit. 25.

[2] Memoria citata (teorema III).

riabili indipendenti e dipendenti, e nemmeno dal numero delle prime e delle seconde. Questa composizione è quella che io rappresento col simbolo γ_{sn} e che ho già avuto occasione di ricordare.

Introduciamo ora una serie di variabili $y_1 \dots y_n$ non trasformate, consideriamo le $x_1 \dots x_n$ come tutte indipendenti tra loro, le $y_1 \dots y_n$ invece come funzioni delle $x_1 \dots x_n$, ed indichiamo con $a_1, \dots a_{m_s}$ le derivate delle y rispetto alle x fino all' ordine s.

La Xf estesa alle $a_1 \dots a_{m_s}$ prende la forma:

$$Xf + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n}^{0 \dots s} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \xi_i}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} X_{i, \nu_1 \dots \nu_n} \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n \leqq s)$$

in cui le $X_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ sono trasformazioni nelle variabili $a_1 \dots a_{m_s}$; esse formano un gruppo con la composizione γ_{sn}: di questo gruppo sappiamo inoltre che esso è semplicemente transitivo [1]. Il sistema di valori:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{ik} \quad (\varepsilon_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \gtrless k, \ \varepsilon_{ii} = 1), \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \dots$$

si indicherà con $a_1^0, \dots a_{m_s}^0$.

Proponiamoci ora di: *esprimere le derivate* $w_1, \dots w_{\mu_s}$ *delle* v *rispetto alle* u, *in funzione delle derivate* $a_1 \dots a_{m_s}$ *delle* y *rispetto alle* x, *in modo che pel sistema di valori* $a_1 = a_1^0, \dots a_{m_s} = a_{m_s}^0$ *assumano i valori iniziali* $w_1^0, \dots w_{\mu_s}^0$.

Questo problema è stato da me già trattato nella Memoria più volte citata. Si trovano delle equazioni

$$w_j^0 = \Phi_j (w_1 \dots w_{\mu_s} ; a_1, \dots a_{m_s}) \qquad j = 1 \dots \mu_s \tag{2}$$

che risolute rispetto a $w_1, \dots w_{\mu_s}$ darebbero le espressioni cercate. Noi possiamo del resto per ciò che segue fare a meno di questa risoluzione.

Le (2) sono le equazioni finite di un gruppo con la composizione γ_{sn}; i parametri della trasformazione identica sono $a_1^0, \dots a_{m_s}^0$. È anche chiaro il significato delle (2): ricordando il procedimento seguìto per formarle, si vede che esse sono affatto indipendenti dalla natura delle funzioni $\xi_1 \dots \xi_n$. Esse dunque rappresentano il modo col quale per una trasformazione generica nelle variabili $x_1 \dots x_n$ vengono trasformate le derivate delle v rispetto alle u.

Come le $X_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ sono le trasformazioni infinitesime del modo di estensione considerato, così le (2) ne sono le equazioni finite.

Si giunge ora immediatamente al teorema enunciato nel principio di questa Nota.

[1] Lie, *Grundlagen für die Theorie der unendl. Tr. gruppen* (Leipziger Berichte 1891).

Sia un gruppo qualunque nelle variabili $x_1 \dots x_n$. Allora hanno luogo le equazioni:

$$(3) \qquad \varpi_k(x_1 \dots x_n) = \mathrm{I}_k \{ \varpi_1(y_1 \dots y_n), \dots \varpi_m(y_1 \dots y_n) ; a_1 \dots a_{m_s} \}$$
$$k = 1 \dots m .$$

Tra le quantità $x_1 \dots x_n$, $w_1^0 \dots w_{\mu_s}^0$, $y_1 \dots y_n$, $w_1 \dots w_{\mu_s}$ non hanno luogo altre relazioni che le (2), (3): gli invarianti differenziali si ottengono dunque per combinazione di queste equazioni. Essi sono i primi membri in equazioni della forma:

$$\Omega \{ \varpi_1(x), \dots \varpi_m(x), w_1^0 \dots w_{\mu_s}^0 \} = \Omega \{ \varpi_1(y), \dots \varpi_m(y), w_1 \dots w_{\mu_s} \}$$

questo appunto volevo dimostrare.

Aggiungerò alcune considerazioni sopra i gruppi rappresentati dalle (2).

1. Dalle equazioni relative alle $w_1, \dots w_{\mu_s}$ si ottengono, per derivazione rispetto $u_1 \dots u_p$, tutte quelle relative alle $w_{\mu_s+1}, \dots w_{\mu_{s+1}}$. Quindi tutte le equazioni (2) si ottengono per derivazione da certe equazioni

$$(2') \qquad w_j^0 = \Phi_j(w_1 \dots w_{\mu_1}, a_1 \dots a_{m_1})$$
$$j = 1 \dots \mu_1$$

che formano un gruppo isomorfo al gruppo lineare omogeneo in n variabili (perchè, come si sa, la composizione γ_{1n} è quella del gruppo lineare omogeneo in n variabili).

D'altra parte [1] le (2′) si possono formare mediante risoluzione di equazioni algebriche, eliminazioni, ed una quadratura al più. Brevemente diremo che *le equazioni* (2) *si formano con operazioni effettuabili.*

Segue già di qui che la determinazione degli invarianti differenziali non richiede che operazioni effettuabili quando si conoscano le equazioni di definizione delle trasformazioni finite — circostanza già nota [2].

Anche le formazione delle (3) non richiede, nei gruppi transitivi, che operazioni effettuabili. Dunque: *la determinazione degli invarianti differenziali di un gruppo transitivo, di cui sono date le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime, non richiede che operazioni effettuabili.*

2. I gruppi rappresentati dalle (2) sono sempre transitivi: se infatti vi fossero degli invarianti:

$$\Omega_1(w_1^0 \dots w_{\mu_s}^0) = \Omega_1(w_1 \dots w_{\mu_s}), \dots$$

questi sarebbero degli invarianti differenziali pel gruppo di tutte le trasformazioni in $x_1 \dots x_n$; poichè questo gruppo trasforma una varietà qualunque

(1) *Théorie der Transformationsgruppen.* Abschnitt III. Theorem. 53.
(2) Lie, *Ueber Differentialinvarianten.* Math. Ann. 24.

contenuta in $R_n: x_1 \dots x_n$ in ogni altra varietà di egual numero di dimensioni, si vede che invarianti siffatti non possono esistere.

La via tenuta per formare gli invarianti differenziali ci suggerisce anche una estensione del concetto di invariante differenziale. Il Killing in un lavoro, *Ueber die Erweiterung des Invariantenbegriffs* (Math. Ann. Bd. 35), ed il Lie nella prima parte dellla *Theorie der Transformationsgruppen*: si sono occupati di una estensione analoga per gli invarianti di ordine zero. Ma gli invarianti a cui mi propongo di accennare non mi sembra siano stati ancora da nessuno considerati.

Imaginiamo di avere formate le equazioni finite (analoghe dunque alle (2)) per un numero qualunque di estensioni diverse. Per fissare le idee e per considerare il caso più semplice, supponiamo di avere fatta un'altra distribuzione delle $x_1 \dots x_n$ in due serie di variabili; siano questa volta $\overline{u}_1 \dots \overline{u}_{p_1}$ le variabili indipendenti, e siano $\overline{v}_1 \dots \overline{v}_{q_1}$ le dipendenti $(q_1 + p_1 = n)$. Indichiamo con $\overline{w}_1 \dots \overline{w}_{\nu_s}$ le derivate delle $\overline{v}$ rispetto alle $\overline{u}$ fino all'ordine s.

Analogamente alle (2), si hanno delle equazioni:

$$(2') \qquad \overline{w}_j^0 = \psi_j(\overline{w} \dots \overline{w}_{\nu_s}, \, a_1 \dots a_{m_s}) \qquad j = 1 \dots \nu_s$$

che rappresentano anche esse, come le (2) e le (3), un gruppo con la composizione γ_{sn}. Considerando l'insieme delle (2), (2'), (3) si hanno tre specie di invarianti:

invarianti composti con le $\varpi_1 \dots \varpi_m \; w_1 \dots w_{\mu_s}$;

invarianti composti con le $\varpi_1 \dots \varpi_m \; \overline{w}_1 \dots \overline{w}_{\nu_s}$;

invarianti composti con le $\varpi_1 \dots \varpi_m, w_1 \dots w_{\mu_s}, \overline{w}_1 \dots \overline{w}_{\nu_s}$ e che non si possono esprimere con soli invarianti delle due prime categorie. Invarianti di questa natura ve ne sono sempre in generale: fanno eccezione soltanto i gruppi che non hanno nell'intorno di un punto generico altro che trasformazioni di ordine zero.

Per questi nuovi invarianti vale naturalmente il teorema enunciato nel principio di questa Nota; le nozioni di invariante relativo, parametro differenziale, ... si estendono facilmente anche a questi invarianti più generali. Anche il bel teorema di Tresse [1] relativo ai criterî di equivalenza di due varietà vale per gli invarianti di cui ci occupiamo. La loro teoria non differisce in sostanza da quella degli invarianti ordinarî: essi si determinano, come questi ultimi, con operazioni effettuabili quando il gruppo da cui si parte è transitivo.

[1] Tresse, *Sur les invariants différentiels* (Acta Matematica, vol. 18).