ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Matematica. — *Sul teorema di moltiplicazione delle operazioni funzionali distributive a determinazione unica.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Sia A simbolo di operazione funzionale, e per tutte le funzioni analitiche $\varphi(x)$ tali che la funzione A $(\varphi(x))$ sia ancora analitica ed abbia un campo comune di convergenza con la φ. si abbia una regola di moltiplicazione espressa dalla formula:

$$\mathrm{A}(\varphi\psi)=\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{r}\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{n} a_{r\cdot s}^{n\cdot m}\,\varphi^{r-s}\psi^{n-m}\,\overline{\mathrm{A}(\varphi)}^{s}\,\overline{\mathrm{A}(\psi)}^{m}\,. \tag{1}$$

I coefficienti $a_{r.s}^{n.m}$ potranno essere supposti numericamente costanti, od anche funzioni analitiche della x convergenti in un campo comune con le φ, ψ, $\mathrm{A}(\varphi)$, $\mathrm{A}(\psi)$.

Ordinando rispetto alla φ, si ha dalla (1):

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}(\varphi\psi)= {} & a_{0.0}^{0.0}+a_{0.0}^{1.0}\psi+a_{0.0}^{1.1}\mathrm{A}(\psi)+a_{0.0}^{2.0}\psi^2+a_{0.0}^{2.1}\psi\mathrm{A}(\psi)+a_{0.0}^{2.2}\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2+\cdots \quad + \\ & +\left(a_{1.0}^{0.0}+a_{1.0}^{1.0}\psi+a_{1.0}^{1.1}\mathrm{A}(\psi)+a_{1.0}^{2.0}\psi^2+a_{1.0}^{2.1}\psi\mathrm{A}(\psi)+a_{1.0}^{2.2}\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2+\cdots\right)\varphi+ \\ & +\left(a_{1.1}^{0.0}+a_{1.1}^{1.0}\psi+a_{1.1}^{1.1}\mathrm{A}(\psi)+a_{1.1}^{2.0}\psi^2+a_{1.1}^{2.1}\psi\mathrm{A}(\psi)+a_{1.1}^{2.2}\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2+\cdots\right)\mathrm{A}(\varphi)+\cdots \\ & +\cdots \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Se conveniamo di scrivere

$$\mathrm{A}(1)=\xi\,; \tag{3}$$

avremo, per $\psi=1$,

$$\mathrm{A}(\varphi)=\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{r}\left(a_{r.s}^{0.0}+a_{r.s}^{1.0}+a_{r.s}^{1.1}\xi+a_{r.s}^{2.0}+a_{r.s}^{2.1}\xi+a_{r.s}^{2.2}\xi^2+\cdots\right). \tag{4}$$

Ora, a meno che la operazione $\mathrm{A}(\varphi)$ non si riduca ad un polinomio intero nella φ a coefficienti funzionali fissi, dovrà aversi identicamente:

$$a_{1.1}^{0.0}+a_{1.1}^{1.0}+a_{1.1}^{1.1}\xi+a_{1.1}^{2.0}+a_{1.1}^{2.1}\xi+a_{1.1}^{2.2}\xi^2+a_{1.1}^{3.0}+\cdots=1\,, \tag{5}$$

e, per ogni altra combinazione degli indici r ed s,

$$a_{r.s}^{0.0}+a_{r.s}^{1.0}+a_{r.s}^{1.1}\xi+a_{r.s}^{2.0}+a_{r.s}^{2.1}\xi+a_{r.s}^{2.2}\xi^2+a_{r.s}^{3.0}+\cdots=0\,. \tag{6}$$

Dovendosi inoltre avere identicamente:

$$A(\varphi\psi) = A(\psi\varphi)\,,$$

saranno eguali i coefficienti dei termini

$$\varphi^{r-s}\,\overline{A(\varphi)}^{\,s}\,\psi^{n-m}\,\overline{A(\psi)}^{\,m}\,,\quad \varphi^{n-m}\,\overline{A(\varphi)}^{\,m}\,\psi^{r-s}\,\overline{A(\psi)}^{\,s}$$

e cioè

$$(7)\qquad a^{n.m}_{r.s} = a^{r.s}_{n.m}$$

Ciò esprime che *sono eguali a due a due quei coefficienti che si ottengono l'uno dall'altro scambiando gli indici superiori con gli inferiori.*

Supponiamo ora che *la operazione* A *sia distributiva ed a determinazione unica.*

Anzitutto, dovendo aversi *a* identicamente $A(\varphi\psi) = 0$ ognivolta che sia la φ che la ψ sono eguali allo zero, dovranno esser nulli tutti i termini che non contengono insieme uno almeno dei fattori φ, $A(\varphi)$, ed uno dei fattori ψ, $A(\psi)$.

Si avrà cioè identicamente:

$$(8)\qquad a^{0.0}_{r.s} = a^{n.m}_{0.0} = 0\,.$$

Così delle identità (5) e (6) verrà a mancare quella corrispondente alla combinazione $r = s = 0$, e tutte le altre perderanno il primo termine.

Di più, dovendo aversi, per qualunque costante numerica m, e per qualunque funzione φ, la identità:

$$(9)\qquad A(m\varphi) - mA(\varphi) = 0$$

si avranno, contemporaneamente, le identità:

$$\left\{\begin{aligned} &m(a^{1.0}_{1.1} - 1) + ma^{1.1}_{1.1}\xi + m^2 a^{2.0}_{1.1} + m^2 a^{2.1}_{1.1}\xi + m^2 a^{2.2}_{1.1}\xi^2 + m^3 a^{3.0}_{1.1} + \\ &\qquad\qquad + m^3 a^{3.1}_{1.1}\xi + \cdots = 0 \\ &ma^{1.0}_{r.s} \qquad + ma^{1.1}_{r.s}\xi + m^2 a^{2.0}_{r.s} + m^2 a^{2.1}_{r.s}\xi + m^2 a^{2.2}_{r.s}\xi^2 + m^3 a^{3.0}_{r.s} + \\ &\qquad\qquad + m^3 a^{3.1}_{1.1}\xi + \cdots = 0, \end{aligned}\right.$$

che potranno anche scriversi:

$$\left\{\begin{aligned} &m(a^{1.0}_{1.1} - 1 + a_{1.1}\xi) + m^2(a^{2.0}_{1.1} + a^{2.1}_{1.1}\xi + a^{2.2}_{1.1}\xi^2) + \\ &\qquad\qquad + m^3(a^{3.0}_{1.1} + a^{3.1}_{1.1}\xi + a^{3.2}_{1.1}\xi^2 + a^{3.3}_{1.1}\xi^3) + \cdots = 0 \\ &m(a^{1.0}_{r.s} \qquad + a_{r.s}\xi) + m^2(a^{2.0}_{r.s} + a^{2.1}_{r.s}\xi + a^{2.2}_{r.s}\xi^2) + \\ &\qquad\qquad + m^3(a^{3.0}_{1.1} + a^{3.1}_{1.1}\xi + a^{3.2}_{1.1}\xi^2 + a^{3.3}_{1.1}\xi^3) + \cdots = 0. \end{aligned}\right.$$

E, queste dovendo essere soddisfatte indipendentemente dal valor numerico di m, avremo singolarmente:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & a^{1.0}_{1.1} - 1 + a^{1.0}_{1.1}\,\xi = 0\,, \qquad a^{2.0}_{1.1} + a^{2.1}_{1.1}\,\xi + a^{2.2}_{1.1}\,\xi^2 = 0\,, \\ & \qquad a^{3.0}_{1.1} + a^{3.1}_{1.1}\,\xi + a^{3.2}_{1.1}\,\xi^2 + a^{3.3}_{1.1}\,\xi^3 = 0\,, \dots \\ & a^{1.0}_{r.s} \qquad + a^{1.0}_{r.s}\,\xi = 0\,, \qquad a^{2.0}_{r.s} + a^{2.1}_{r.s}\,\xi + a^{2.2}_{r.s}\,\xi^2 = 0\,, \\ & \qquad a^{3.0}_{r.s} + a^{3.1}_{r.s}\,\xi + a^{3.2}_{r.s}\,\xi^2 + a^{3.3}_{r.s}\,\xi^3 = 0 \,\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Queste identità ci permettono di modificare la espressione di $A(\varphi\psi)$.

Da quelle che sono del primo grado in ξ, si ricava

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & a^{1.1}_{1.1} = -\frac{1}{\xi}\,(a^{1.0}_{1.1} - 1)\,, \\ & a^{1.1}_{r.s} = -\frac{1}{\xi}\,a^{1.0}_{r.s}\,. \end{aligned}\right.$$

Le espressioni del primo grado in ψ ed $A(\psi)$ che si trovano in $A(\varphi\psi)$ si modificano perciò nel modo seguente:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & a^{1.0}_{1.1}\,\psi + a^{1.1}_{1.1}\,A(\psi) = a^{1.0}_{1.1}\left(\psi - \frac{1}{\xi}\,A(\psi)\right) + \frac{1}{\xi}\,A(\psi) \\ & a^{1.0}_{r.s}\,\psi + a^{1.1}_{r.s}\,A(\psi) = a^{1.0}_{r.s}\left(\psi - \frac{1}{\xi}\,A(\psi)\right). \end{aligned}\right.$$

Si osservi poi che il trinomio del secondo grado $a^{2.0}_{r.s} + a^{2.1}_{r.s}\,\xi + a^{2.2}_{r.s}\,\xi^2$ dovendo esser zero per quello stesso valore della ξ che annulla il binomio $a^{1.0}_{r.s} + a^{1.1}_{r.s}\,\xi$; il trinomio $a^{2.0}_{r.s}\,\psi^2 + a^{2.1}_{r.s}\,\psi A(\psi) + a^{2.2}_{r.s}\,\overline{A(\psi)}^2$, deve essere esattamente divisibile per il binomio $a^{1.0}_{r.s}\,\psi + a^{1.1}_{r.s}\,A(\varphi)$; e cioè, ricordando le (12), avremo:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & a^{2.0}_{r.s}\,\psi^2 + a^{2.1}_{r.s}\,\psi A(\psi) + a^{2.2}_{r.s}\,\overline{A(\psi)}^2 = a^{2.0}_{r.s}\left(\psi - \frac{1}{\xi}\,A(\psi)\right)\left(\psi + b^{2.2}_{r.s}\,A(\psi)\right) \\ & \qquad b^{2.2}_{r.s} = \frac{a^{2.0}_{r.s}\,\dfrac{1}{\xi} + a^{2.1}_{r.s}}{a^{2.0}_{r.s}} = \frac{a^{2.2}_{r.s}}{a^{2.0}_{r.s}}\,\xi\,. \end{aligned}\right.$$

Il caso di $r = s = 1$, qui si riduce alla regola comune; anzi a quello di $r = 1$, $s = 0$, osservando che, in forza delle (7) ed (11), si ha:

$$a^{2.0}_{1.1} : a^{2.0}_{1.0} = a^{2.1}_{1.1} : a^{2.1}_{1.0} = a^{2.2}_{1.1} : a^{2.2}_{1.0} = -\frac{1}{\xi}.$$

Così seguitando, per i quadrinomi del terzo grado si avrebbe la espressione:

$$(14)\left\{\begin{aligned} & a^{3.0}_{r.s}\,\psi^3 + a^{3.1}_{r.s}\,\psi^2\,\mathrm{A}(\psi) + a^{3.2}_{r.s}\,\psi\,\overline{\mathrm{A}(\psi)}^2 + a^{3.3}_{r.s}\,\overline{\mathrm{A}(\psi)}^3 = \\ & \qquad = a^{3.0}_{r.s}\Big(\psi - \frac{1}{\xi}\,\mathrm{A}(\psi)\Big)\Big(\psi + b^{2.2}_{r.s}\,\mathrm{A}(\psi)\Big)\Big(\psi + b^{3.3}_{r.s}\,\mathrm{A}(\psi)\Big) \\ & \qquad\qquad b^{3.3}_{r.s} = \frac{a^{3.0}_{r.s} + a^{3.1}_{r.s}\,\xi - a^{2.2}_{r.s}\,\xi^2}{a^{3.0}_{r.s}\,\xi} \end{aligned}\right.$$

Sostituendo queste espressioni nella (2) e tenendo conto della (8), si avrà infine:

$$(15)\left\{\begin{aligned} & \mathrm{A}(\varphi\psi) = \Big(\psi - \frac{1}{\xi}\,\mathrm{A}(\psi)\Big)\sum\nolimits_{r.s}\Big\{a^{1.0}_{r.s} + \Big(\psi + b^{2.2}_{r.s}\,\mathrm{A}(\psi)\Big)\Big[\,a^{2.0}_{r.s} + \\ & \qquad\qquad + \Big(\psi + b^{3.3}_{r.s}\,\mathrm{A}(\psi)\Big)\Big\{\,a^{3.0}_{r.s} + \cdots \quad \Big\}\Big]\Big\}\,\varphi^{r-s}\,\overline{\mathrm{A}(\varphi)}^s \\ & \qquad + \frac{1}{\xi}\,\mathrm{A}(\psi)\,\mathrm{A}(\varphi). \end{aligned}\right.$$ [1]

Analoga espressione si avrebbe ordinando rispetto alle potenze delle ψ ed $\mathrm{A}(\psi)$; si può dunque mettere la (15) sotto la forma più simmetrica:

$$(16)\left\{\begin{aligned} & \mathrm{A}(\varphi\psi) = \Big(\varphi - \frac{1}{\xi}\,\mathrm{A}(\varphi)\Big)\Big(\psi - \frac{1}{\xi}\,\mathrm{A}(\psi)\Big)\Big\{\alpha_0 + \alpha_{1.0}\,(\varphi + \psi) + \\ & \qquad\qquad + \alpha_{1.1}\Big(\mathrm{A}(\varphi) + \mathrm{A}(\psi)\Big) + \alpha_{2.0}\,\varphi\psi + \cdots\Big\} \\ & \qquad + \frac{1}{\xi}\,\mathrm{A}(\varphi)\,.\,\mathrm{A}(\psi). \end{aligned}\right.$$

Nel caso in cui sia identicamente

$$\mathrm{A}(1) = \xi = 0,$$

le formule (15), (16) hanno forma indeterminata, al teorema di moltiplica-

[1] L'algoritmo $a_0 + a_1 \{ a_2 + a_3 [a_4 + \cdots \;] \}$, ha proprietà analoghe a quelle delle frazioni continue; spero, in altra occasione, di farne oggetto speciale di studio.

zione si può dare, in questo caso, una forma più conveniente osservando che, dalle identità (5) e (6), per $\xi = 0$ si ricavano le altre:

$$(17) \qquad \begin{cases} a^{1.1}_{1.0} = a^{1.0}_{1.1} = 1 \\ a^{m.0}_{r.s} = a^{m.n}_{r.0} = 0 \,. \end{cases}$$

Introducendo queste ipotesi nella formula (2) e ricordando le (8), potremo dare alla regola di moltiplicazione la forma:

$$(18) \quad \mathrm{A}(\varphi\psi) = \varphi\mathrm{A}(\psi) + \psi\mathrm{A}(\varphi) + \mathrm{A}(\varphi)\,\mathrm{A}(\psi) \,.\Big\{ a^{1.1}_{1.1} + a^{2.1}_{1.1}(\varphi + \psi) + \\ + a^{2.2}_{1.1}\big(\mathrm{A}(\varphi) + \mathrm{A}(\psi)\big) + a^{2.2}_{2.1}\,\varphi\psi + \cdots \Big\}$$

la quale dunque dovrà usarsi tutte le volte che $\mathrm{A}(1) = 0$.

È appena necessario far notare che fra le operazioni A, che hanno una legge di moltiplicazione esprimibile con una delle formole (16), (18), sono comprese tutte quelle fino ad ora introdotte nella analisi.

Come primo esempio supponiamo nella formula (16):

$$\alpha_0 = \alpha_{1.0} = \alpha_{1.1} = \cdots = 0$$

ed

$$\mathrm{A}(1) = \xi = 1 \,;$$

avremo il teorema di moltiplicazione

$$\mathrm{A}(\varphi\psi) = \mathrm{A}(\varphi)\,.\,\mathrm{A}(\psi)$$

proprio della operazione:

$$\theta(\varphi) = \varphi + \Delta(\varphi)$$

la quale è appunto distributiva anche rapporto alla moltiplicazione.

Si supponga in secondo luogo α_0 diversa dallo zero, e tutti gli altri coefficienti α identicamente nulli.

Avremo così la formula di moltiplicazione

$$(19) \quad \mathrm{A}(\varphi\psi) = \left(\varphi - \frac{1}{\xi}\mathrm{A}(\varphi)\right)\left(\psi - \frac{1}{\xi}\mathrm{A}(\psi)\right)\alpha_0 + \frac{1}{\xi}\mathrm{A}(\varphi)\,\mathrm{A}(\psi)\,.$$

Facendo in questa formula $\alpha_0 = \beta\xi$, e tenendo conto delle relazioni

$$\beta\xi + \gamma = 0$$
$$\alpha\xi + \beta = 1$$

si ha la formula di moltiplicazione:

$$\mathrm{A}(\varphi\psi) = \alpha\,\mathrm{A}(\varphi)\,\mathrm{A}(\psi) + \beta\big(\varphi\,\mathrm{A}(\psi) + \psi\,\mathrm{A}(\varphi)\big) + \gamma\,\varphi\,\psi$$

che è quella studiata dal Pincherle per cercare una generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano [1].

[1] Cfr. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. VI, 2 maggio 1897.

Se nella formula (19) poniamo $\alpha_0 = -\xi$ si ha

$$A(\varphi\psi) = -\xi\varphi(\psi) + \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)$$

e se in questa supponiamo inoltre

$$\xi = 0 ,$$

avremo

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)$$

che è il teorema di moltiplicazione per la derivazione ordinaria.

A questo teorema si poteva giungere direttamente dalla formula (18) supponendovi tutti i coefficienti $a_{r.s}^{m.n}$ identicamente nulli.

Se invece, in questa stessa formula si suppone che il primo coefficiente a sia eguale all' unità e che sieno nulli tutti gli altri, si ha il teorema di moltiplicazione

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi)\, A(\psi)$$

che appartiene alla operazione di differenziazione finita:

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x) .$$

Matematica. — *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali del secondo ordine con due variabili indipendenti.* Nota del dott. P. BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

1. In questa Nota, che ho l' onore di presentare alla R. Accademia, mi propongo di far conoscere un metodo molto elementare per dedurre e studiare le trasformate differenziali di una equazione differenziale del secondo ordine con due variabili indipendenti. I risultati che si ottengono sono, per l'equazione lineare, quegli stessi ottenuti dai signori Darboux e R. Liouville in casi particolari e dal prof. Niccoletti nel caso generale [1]: per quelle

[1] *Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine.* Pisa, tip. Nistri, 1897. In questa Memoria si trovano le altre indicazioni sull'argomento che io ometto per brevità.