ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio* (1). Nota del Corrispondente S. Pincherle.

1. Sia A un'operazione distributiva, che muta ogni serie di potenze intere positive della variabile x in una serie simile mediante le relazioni di definizione

$$A(x^n) = x^n(a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{n.p}\, x^p), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Una serie di potenze

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n\, x^n$$

sarà trasformata, dall'operazione A, nella serie

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n-p.p}\, k_{n-p} + a_{n-p+1.p-1}\, k_{n-p+1} + \cdots + a_{n-1.1}\, k_{n-1} + a_{n.0} k_n). x^n, \tag{2}$$

dove sono da porsi uguali a zero tutte le k con indice negativo.

2. È noto che dell'operazione A si può dare un'espressione analitica sotto forma di serie ordinata per le derivate successive $D^n\varphi$ della funzione arbitraria su cui si opera.

(1) Un caso particolare della questione trattata nel presente lavoro ha formato l'oggetto di una Nota, letta nella R. Accademia delle Scienze di Bologna il 30 gennaio 1898, dal titolo: *Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche.*

Indicando con ξ_n il secondo membro della (1), sarà [1]:

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\xi_n - nx\xi_{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \xi_{n-2} - \cdots + (-1)^n x^n \xi_0 \right) D^n \varphi ;$$

ora, se si eseguisce l'operazione indicata tra parentesi sulle ξ_n, e si rappresenta con Δ la differenza finita rispetto all'indice n, l'espressione precedente si trasforma senza difficoltà in

$$(3) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Delta^n (a_{00} + a_{01}x + \cdots + a_{0p}x^p) D^n \varphi .$$

Mentre le (1) definivano l'operazione A per le sole serie di potenze, la (3) vale a definirla per ogni funzione analitica φ che renda il secondo membro convergente in ugual grado entro un'area del piano della variabile x.

3. Indichiamo subito alcuni casi particolari dell'operazione A. Se i coefficienti $a_{n.0}, a_{n.1}, \dots a_{n.p}$ si suppongono indipendenti dall'indice n, l'operazione $A(\varphi)$ si riduce alla moltiplicazione di una serie di potenze arbitraria φ per un polinomio di grado p.

Se i coefficienti $a_{n.0}, \dots a_{n.p}$ sono polinomî razionali interi di grado s rispetto all'indice n, le loro differenze finite dall'ordine $s+1$ in avanti saranno nulle, e la (3) mostra che in tale ipotesi la $A(\varphi)$ si riduce ad una forma lineare differenziale d'ordine s, normale rispetto al punto $x = 0$, cioè i cui integrali sono regolari nell'intorno di questo suo punto singolare.

4. Ammetteremo che i coefficienti a_{n0} ed a_{np} siano differenti da zero per ogni valore di n. Dalla prima di queste ipotesi risulta che se si cerca di soddisfare alla equazione $A(\varphi) = 0$ mediante una serie di potenze φ di x, tutti i cofficienti di questa serie sono nulli. L'operazione A non ha quindi radici nell'insieme (o spazio) delle serie di potenze.

5. Si indichino con B, B' operazioni definite da

$$B(x^n) = h_n x^n, \quad B'(x^n) = h'_n x^n,$$

l'operazione $BAB' = A_1$ avrà la medesima forma di A, cioè si avrà

$$A_1(x^n) = x^n(a'_{n0} + a'_{n1} x + \cdots + a'_{np} x^p):$$

ora, le a_{n0} ed a_{np} essendo differenti da zero, si potrà disporre delle h_n ed h'_n in modo che a'_{n0} ed a'_{np} siano, per ogni valore di n, uguali all'unità. Mediante una simile trasformazione, possiamo quindi innanzi ammettere che sia

$$(1') \qquad A(x^n) = x^n (1 + a_{n1} x + a_{n2} x^2 + \cdots + x^p) .$$

[1] V. *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif.* Math. Annalen, Bd. XLIX, §§ 56 e 63.

Faremo infine l'ipotesi che le $a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{n.p-1}$ abbiano limiti finiti per $n = \infty$; siano questi rispettivamente $a_1, a_2, \dots a_{p-1}$. Ci sarà necessario di considerare l'equazione algebrica

$$1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots y^p = 0\,, \tag{4}$$

e siano $z_1, z_2, \dots z_n$ le sue radici, con

$$|z_1| \geq |z_2| \geq \cdots \geq |z_n|\,.$$

6. Fin qui, non si è fatta nessuna ipotesi relativamente alla convergenza della serie φ cui si intendeva applicata l'operazione A. D'ora in avanti, considereremo quelle serie φ che convergono entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio superiore a $|z_1|$; diremo S l'insieme (spazio lineare) di tali serie, ed ogni tale serie sarà un *elemento* o *punto* di S.

Considerando la $A(\varphi)$, data dalla (2), segue immediatamente (dall'ipotesi che le $a_{n.i}$ hanno limiti finiti per $n = \infty$) che $A(\varphi)$ è una serie di potenze appartenente allo spazio S. Dico però che essa non è una serie arbitraria di questo spazio. Infatti, si ha

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

con

$$g_n = k_{n-p} + a_{n-p+1.p-1}\, k_{n-p+1} + \cdots + a_{n-1.1}\, k_{n-1} + k_n\,; \tag{5}$$

se ora determiniamo una successione di numeri q_n mediante l'equazione ricorrente

$$q_n + a_{n.1}\, q_{n+1} + a_{n.2}\, q_{n+2} + \cdots + q_{n+p} = 0\,, \qquad (n = 0\,, 1\,, 2\,, \dots..)\,, \tag{6}$$

si scorge facilmente che la serie $\sum g_n q_n$ è assolutamente convergente e che il suo valore è zero. Infatti, la (6) è una equazione lineare alle differenze che ammette come equazione caratteristica la (4); onde per un noto teorema del Poincaré risulta che

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| = |z_i|\,, \tag{7}$$

ed, in generale, precisamente $|z_1|$.

Ora, per essere $A(\varphi)$ un elemento dello spazio S, indicando con r il raggio del cerchio di convergenza di $A(\varphi)$ e con r', r'' due numeri positivi tale che sia

$$r > r' > r'' > |z_1|\,,$$

si avrà, M essendo un numero positivo finito:

$$|g_n| < \frac{M}{r'n};$$

per la (7), da un valore N dell'indice n in avanti, si avrà pure, M' essendo anche un numero positivo finito:

$$|q_n| < M' r''^n,$$

onde la serie $\sum |g_n q_n|$ è convergente, e quindi la $\sum g_n q_n$ è assolutamente convergente. Ma ponendo per le g_n la loro espressione (5), viene immediatamente in forza delle (6) che il valore di $\sum g_n q_n$ è zero.

7. Indichiamo con $Q_1(n), Q_2(n), \ldots Q_p(n)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (6). Si ha, $c_1, c_2, \ldots c_n$ essendo costanti arbitrarie.

$$q_n = c_1 Q_1(n) + c_2 Q_2(n) + \cdots + c_p Q_p(n);$$

ciò significa che la relazione

$$\sum g_n q_n = 0,$$

equivale alle p relazioni

$$\sum g_n Q_1(n) = 0, \quad \sum g_n Q_n(n) = 0, \ldots, \quad \sum g_n Q_p(n) = 0. \tag{8}$$

In altri termini, la serie $A(\varphi) = \sum g_n x^n$ non è un elemento di S arbitrario, ma appartiene allo spazio lineare $S^{(p-1)}$, contenuto in S, delle serie i cui coefficienti soddisfano alle p relazioni indipendenti (8).

8. In alcune Note recenti, sono stato condotto a distinguere nelle operazioni distributive due diversi generi di degenerescenza [1]. Si può dire *degenere di primo genere* in uno spazio S ad infinite dimensioni un'operazione che ha radici fra gli elementi di S; *degenere di secondo genere* nello stesso spazio un'operazione che fa corrispondere agli elementi di S quelli di uno spazio S_1 contenuto in S ma non identico con S. Questi due generi di degenerescenza si presentano sempre insieme quando S si riduce ad un numero finito di dimensioni, caso in cui l'operazione distributiva diviene una omografia ordinaria. Riassumendo allora il risultato del § 4 e quello del § precedente, possiamo dire che:

L'operazione A *definita dalle* (1') *non ammette degenerescenza di primo genere, ma ammette sempre degenerescenza di secondo genere.*

Chiamando *piano* di S l'insieme delle funzioni $\sum g_n x^n$ di S che soddisfano ad una relazione $\sum g_n p_n = 0$, la $A(\varphi)$ appartiene ad un tempo a p

[1] V. *Appunti di calcolo funzionale distributivo*, § 10, nei Rendiconti del R. Istituto lombardo, S. II, T. XXX, 1897; *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni* (nota a pie' della penultima pagina) nei Rendiconti della R. Accad. di Bologna, 30 gennaio 1898; *Sull'operazione aggiunta*, ibid., 17 aprile 1898.

piani, ossia, secondo la notazione usata nella Nota: *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni*, ad un $S^{(p-1)}$ di punti o $\sum_{p+1}$ di piani. La degenerescenza di secondo genere di A è quindi della $p-1^{\text{sima}}$ specie.

9. Occupiamoci ora dell'operazione A^{-1} inversa di A. Poichè A non ha radici nella classe delle serie di potenze, la A^{-1} sarà, in questo spazio, a determinazione unica e la sua determinazione si avrà quando si abbiano le espressioni delle $A^{-1}(x^m)$ per ogni numero m intero positivo. A questo effetto, si ponga

$$A^{-1}(x^m) = (b_{m.m} + b_{m.m+1}\, x + \cdots + b_{m.m+\nu}\, x^\nu + \cdots)\, x^m\,;$$

facendo $AA^{-1}(x^m) = x^m$ ed applicando le (1'), se ne dedurrà per la determinazione delle $b_{m.m+\nu}$, il sistema di relazioni

$$(9)\qquad \begin{cases} b_{m.m} = 1 \\ b_{m.m+1} + b_{m.m}\, a_{m.1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m.m+\nu} + b_{m.m+\nu-1}\, a_{m+\nu-1.1} + \cdots + b_{m.m+\nu-p} = 0\,. \end{cases}$$

Da queste si conclude che le $b_{m.\nu}$ sono integrali dell'equazione ricorrente

$$(10)\quad K(\nu) + a_{\nu-1.1}\, K(\nu-1) + \cdots + a_{\nu-p+1.p-1}\, K(\nu-p+1) + K(\nu-p) = 0,$$

colle condizioni iniziali

$$(11)\qquad b_{m.m} = 1\,,\quad b_{m.m-1} = 0\,,\quad b_{m.m-2} = 0\,, \ldots\, b_{m.m-p} = 0\,.$$

L'equazione (10) è quella che si dice *inversa* od *aggiunta* della (6); è noto ([1]) che ad un suo sistema fondamentale $K_1(\nu)\,, K_2(\nu)\,, \ldots K_p(\nu)$, corrisponde un sistema fondamentale della (6) dato dagli elementi reciproci della prima linea nel determinante

$$\begin{vmatrix} K_1(\nu) & K_2(\nu) & \ldots K_p(\nu) \\ K_1(\nu-1) & K_2(\nu-1) & \ldots K_p(\nu-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_1(\nu-p+1) & K_2(\nu-p+1) & \ldots K_p(\nu-p+1) \end{vmatrix}$$

divisi per il determinante stesso.

10. I coefficienti $b_{m.\nu}$ delle $A^{-1}(x^m)$ si possono esprimere in funzione lineare omogenea del sistema fondamentale $K_1(\nu)\,, K_2(\nu)\,, \ldots K_p(\nu)$; potremo cioè scrivere

$$b_{m.\nu} = c_1(m)\, K_1(\nu) + c_2(m)\, K_2(\nu) + \cdots + c_p(m)\, K_p(\nu)\,.$$

([1]) V. Bortolotti: *La forma aggiunta di una forma lineare alle differenze*, in questi Rendiconti, Serie 5ª, T. V, 1896.

Ma le condizioni (11) danno

$$\left\{\begin{array}{llll} c_1(m)\,K_1(m) & +c_2(m)\,K_2(m) & +\cdots+c_p(m)\,K_p(m) & =1 \\ c_1(m)\,K_1(m-1) & +c_2(m)\,K_2(m-1) & +\cdots+c_p(m)\,K_p(m-1) & =0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1(m)\,K_1(m-p+1) & +c_2(m)\,K_2(m-p+1) & +\cdots+c_p(m)\,K_p(m-p+1) & =0\,, \end{array}\right.$$

da cui segue, per la proposizione richiamata, che $c_1(m)$, $c_2(m)$, ... $c_p(m)$ costituiranno un sistema fondamentale dell' equazione (6). Abbiamo in tal modo ottenuta l' espressione delle $A^{-1}(x^m)$ sotto la forma

$$(12)\quad A^{-1}(x_m)=\sum_{i=1}^{p} c_i(m)\,(K_i(m)x^m + K_i(m+1)x^{m+1} + K_i(m+2)x^{m+2} + \cdots).$$

In quanto alla convergenza di questo sviluppo, si osservi che l' equazione caratteristica della (10) è la reciproca della (4), cioè

$$y^p + a_1 y^{p-1} + \cdots a_{p-1}\,y + 1 = \left(y-\frac{1}{z_1}\right)\left(y-\frac{1}{z_2}\right)\cdots\left(y-\frac{1}{z_p}\right)=0\,;$$

ora $K_i(\nu)$ essendo integrale della (10), si avrà per il citato teorema di Poincaré:

$$(13)\qquad \lim_{\nu=\infty}\left|\frac{K_i(\nu+1)}{K_i(\nu)}\right| \leq \frac{1}{|z_p|},$$

talchè lo sviluppo (12) converge almeno entro il cerchio di centro $x=0$ e di raggio $|z_p|$.

11. Ottenute così le $A^{-1}(x^m)$, sarà facile di avere il risultato dell' operazione A^{-1} applicata ad un elemento qualunque $\varphi=\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ dello spazio S. Sia r il raggio del cerchio di convergenza di φ con $r>|z_1|$. Si avrà

$$(14)\qquad A^{-1}(\varphi)=\sum_{i=1}^{p}\;\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_n\, c_i(n)\, K_i(n+\nu)\,x^{n+\nu}$$

ossia

$$A^{-1}(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} k_n\, x^n$$

con

$$k_n=\sum_{i=1}^{p}\left(g_0\, c_i(0)+g_1\, c_i(1)+\cdots+g_n\, c_i(n)\right) K_i(n)\,.$$

Qui si può anche porre

$$C_n(\nu)=\sum_{i=1}^{p} c_i(\nu)\, K_i(n)\,,$$

e si ottiene

$$(15) \qquad k_n = g_0\, C_n(0) + g_1\, C_n(1) + \cdots + g_n\, C_n(n)\,.$$

In quanto alla convergenza dello sviluppo trovato, osserviamo che, per la (14), essa avrà certamente luogo nel campo comune di convergenza delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g_n\, c_i(n)\, x^n|\,, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |K_i(\nu)\, x^\nu|\,,$$

nel cui prodotto sono compresi i moduli dei termini della serie (14). Ora la seconda di queste serie converge, come si è detto, per $|x| < |z_p|$; la prima converge almeno entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio 1, per essere la $\sum g_n\, c_i(n)$ assolutamente convergente, come si è dimostrato al § 6. Ma dalla forma dell'equazione (4), segue $|z_p| \leq 1$, onde la serie (14) converge almeno entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $|z_p|$.

12. Da quanto precede si conclude che mentre φ è un elemento di S, $A^{-1}(\varphi)$ non appartiene generalmente ad S ma converge in un cerchio di raggio $|z_p|$ generalmente inferiore a $|z_1|$. Ciò è analogo a quanto accade nel caso della divisione di φ per il polinomio $(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_p)$, operazione che rientra come caso particolare in quella qui studiata. Ma sotto le condizioni necessarie e sufficienti $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \cdots = \varphi(z_p) = 0$, il quoziente di φ per il dato polinomio appartiene ad S. Vogliamo cercare quali sono, nel caso dell'operazione generale A, le condizioni perchè la $A^{-1}(\varphi)$ appartenga ad S, o, in altre parole, in quali funzioni φ di S l'esecuzione dell'operazione A^{-1} non produce singolarità. Queste condizioni, che si riducono a quelle della divisibilità nel caso che la A sia la moltiplicazione per un polinomio, sono espresse dal seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'operazione A^{-1}, *eseguita su una funzione* φ *di* S, *produca una funzione di* S, *è che* φ *appartenga al* $S^{(p-1)}$ *di* S *definito dalle* p *condizioni* (8).

13. Che la condizione sia necessaria è subito visto; infatti se $A^{-1}(\varphi) = \psi$ deve appartenere ad S, $A(\psi) = \varphi$ apparterrà al $S^{(p-1)}$ in forza dei §§ 6 e 7. Essendo poi le $c_1(n)\,, c_2(n)\,, \dots c_p(n)$ un sistema fondamentale della (6) al pari delle $Q_1(n)\,, Q_2(n)\,, \dots Q_p(n)$, le condizioni (8) si possono anche scrivere:

$$(16) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\, c_i(\nu) = 0\,, \quad (i = 1\,, 2\,, \dots p)\,.$$

14. Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Ricordando che

$$C_n(\nu) = \sum_{i=1}^{p} c_i(\nu)\, K_i(n)\,,$$

deduciamo dalle (16):

$$k_n = -\sum_{\nu=n+1}^{\infty} g_\nu C_n(\nu). \tag{17}$$

Ma le $c_i(\nu)$ o le $K_i(\nu)$ sono rispettivamente (§ 9) un sistema fondamentale di integrali della (6) ed il sistema fondamentale corrispondente dell'equazione aggiunta (10); come tali, essi sono legati dalle relazioni [1]

$$\sum_{i=1}^{p} c_i(n+q) K_i(n) = \begin{cases} 0 \text{ per } q = 1, 2, \dots p-2, \\ 1 \text{ per } q = p-1; \end{cases} \tag{18}$$

ne viene che $C_n(\nu)$ è un integrale della (6) determinato dalle condizioni iniziali

$$C_n(n+1) = C_n(n+2) = \dots = C_n(n+p-2) = 0, \quad C_n(n+p-1) = 1, \tag{19}$$

onde

$$C_n(n+p) = -a_{n.p-1}, \quad C_n(n+p+1) = -a_{n.p-1}\, C(n+p) - a_{n+1.p-2}, \dots$$

Ora, essendo a_i il limite di $a_{n.i}$ per $n = \infty$, ed indicando con b_i un numero tale che sia $|b_i| > |a_i|$ $(i = 1, 2, \dots p-1)$, potremo prendere l'indice n tale che per esso e tutti i successivi sia

$$|a_{n+\nu.i}| < |b_i|;$$

potremo inoltre scegliere i numeri b_i in modo che le radici di

$$1 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_{p-1} y^{p-1} + y^p = 0$$

abbiano i loro moduli non maggiori di un numero positivo v tale che sia

$$r > r' > v \geq |z_1|.$$

Dalle (19), (19'), risulterà allora, M″ essendo un numero positivo fisso:

$$|C_n(n+\nu| < M'' v^{\nu-p+1},$$

onde la (17), notando che per le (18) i suoi primi $p-2$ termini sono nulli, darà

$$|k_n| < M''(|g_{n+p-1}| + |g_{n+p}| v + |g_{n+p+1}| v^2 + \cdots)$$

e poichè si ha

$$|g_n| < \frac{M}{r'^n},$$

viene

$$|k_n| < \frac{M\,M''}{r'^{n+p-1}} \left(1 + \frac{v}{r'} + \frac{v^2}{r'^2} + \cdots\right),$$

[1] Bortolotti, loc. cit., § 8.

la quale prova che $A^{-1}(\varphi) = \sum k_n x^n$ converge nel cerchio di raggio r, c. d. d.

15. Quando la funzione φ di S non appartiene allo spazio $S^{(p-1)}$ definito dalle (8), l'operazione A^{-1} produce dunque su essa singolarità entro il cerchio $|z_1|$. Queste singolarità sono però di tal natura che prese $p+1$ funzioni di S,

$$\varphi_h = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{h\nu}\, x^\nu\,, \quad (h = 1\,, 2\,, \ldots p+1)\,,$$

e posto $A^{-1}(\varphi) = \psi_h$, vi è una combinazione lineare delle ψ_h priva di singolarità entro $|z_1|$; essa sarà la $l_1\,\psi_1 + l_2\,\psi_2 + \cdots + l_{p+1}\,\psi_{p+1}$, quando si determinino le l_i mediante le relazioni

$$l_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{1\nu}\, c_i(\nu) + l_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{2\nu}\, c_i(\nu) + \cdots + l_{p+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{p+1.\nu}\, c_i(\nu) = 0\,,$$

$$(i = 1\,, 2\,, \ldots p).$$

Non sarebbe difficile dimostrare, reciprocamente, che se è dato un sistema $\overline{S}$ di serie di potenze convergenti nel cerchio di raggio z, ma tali che prese p qualunque di esse, una combinazione lineare di queste p converge oltre il detto cerchio, questo sistema $\overline{S}$ è ottenuto dall'insieme delle serie convergenti oltre z mediante l'applicazione dell'operazione inversa di una A quale è stata definita in questo lavoro.

16. Riassumendo, il risultato della presente Nota è il seguente:

Definita l'operazione A *dalle relazioni*

$$A(x^n) = x^n(1 + a_{n.1}\, x + \cdots a_{n.p-1}\, x^{p-1} + x^p)\,,$$

con $\lim_{n=0} a_{n.i} = a_i$ *e* ζ *il massimo modulo delle radici di* $1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{p-1}\, y^{p-1} + y^p = 0$; *detto poi* S *l'insieme delle serie di potenze di* x *convergenti in un cerchio di raggio superiore a* ζ, *l'operazione* A^{-1}, *applicata alle serie di* S, *produce funzioni aventi in generale singolarità entro il cerchio* ζ. *L'operazione* A^{-1} *produce funzioni prive di singolarità entro quel cerchio se, e soltanto se la serie di* S, $\sum g_n\, x^n$, *cui essa si applica, è tale che*

$$\sum g_n\, C(n) = 0\,,$$

essendo $C(n)$ *l'integrale generale dell'equazione lineare alle differenze finite:*

$$C(n) + a_{n.1}\, C(n+1) + \cdots + a_{n.p-1}\, C(n+p-1) + C(n+p) = 0.$$

Come si è già avvertito, la condizione qui espressa ricade su quella di divisibilità per $1 + a_1\, x + \cdots a_{p-1}\, x^{p-1} + x_p$ quando è $a_{n.i}$ indipendente da $n_1(a_{n.i} = a_i)$. Quando le $a_{n.i}$ sono funzioni razionali di n, il teorema qui enunciato fornisce proprietà delle equazioni differenziali lineari, che il lettore può facilmente sviluppare.