ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Matematica. — *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul determinante wronskiano.* Nota di G. VIVANTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

È noto da tempo il seguente teorema:

Se n funzioni reali $y_1, y_2, \dots, y_n$ d'una variabile reale x sono legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non tutti nulli, il loro wronskiano è identicamente nullo; e reciprocamente, se il wronskiano di n funzioni è identicamente nullo, esse sono legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non tutti nulli.

La prima parte del teorema è quasi evidente. Sulla seconda il prof. Peano sino dal 1889 (*Sur le déterminant wronskien*, Mathésis, t. IX, p. 75-76; *Sur les wronskiens*, ivi p. 110-112) ha emesso qualche obiezione, citando l'esempio delle due funzioni:

$$y_1 = x^2\,, \qquad y_2 = x \operatorname{mod.} x\,,$$

il cui wronskiano è nullo senza che fra esse esista una relazione lineare. Più di recente (*Sul determinante wronskiano*, Rend. dell'Acc. dei Lincei, s. 5ª, t. VI, 1897, 1° sem., p. 413-415) egli ha ripreso l'argomento, dimostrando che:

Se il wronskiano di n funzioni è nullo in tutto un intervallo ab senza che esista alcun punto di questo in cui sieno nulli tutti i complementi algebrici degli elementi dell'ultima linea di esso, tra le n funzioni esiste per tutti i punti di quell'intervallo una medesima relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non tutti nulli.

La dimostrazione di Peano si fonda sui metodi di Grassmann e sulla teoria dei numeri complessi d'ordine superiore. Però il teorema può stabilirsi facilmente anche senza ricorrere a tali teorie.

Sia W il wronskiano delle n funzioni, e sieno ordinatamente $D_1, D_2, \dots, D_n$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima sua linea, $E_1, E_2 \dots, E_n$ quelli degli elementi della penultima. Applicando a D_i la nota regola di derivazione d'un determinante, si trova come risultato la somma di $n-1$ determinanti, di cui $n-2$ sono identicamente nulli, e l'ultimo è $-E_i$; sicchè si ha:

$$D'_i = -E_i \qquad (i = 1, 2 \dots, n).$$

Ora per una proprietà generale dei determinanti si ha:

$$D_1 y_1 + D_2 y_2 + \cdots + D_n y_n = 0, \tag{α}$$

e per una proprietà dei determinanti nulli:

$$\frac{E_1}{D_1} = \frac{E_2}{D_2} = \cdots = \frac{E_n}{D_n},$$

ossia:

$$\frac{D'_1}{D_1} = \frac{D'_2}{D_2} = \cdots = \frac{D'_n}{D_n}.$$

Posto:

$$D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2 = M^2,$$

si ha di qui facilmente:

$$\frac{D'_1}{D_1} = \frac{D'_2}{D_2} = \cdots = \frac{D'_n}{D_n} = \frac{M'}{M},$$

e quindi:

$$\frac{MD'_i - M' D_i}{M^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Poichè M non è mai nulla nell'intervallo ab, si potrà integrare l'espressione precedente per tutto quest'intervallo, e si avrà, indicando con k_i una costante:

$$\frac{D_i}{M} = k_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

quindi sostituendo nella (α) e sopprimendo il fattor comune M:

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0, \tag{β}$$

per tutti i punti dell'intervallo ab.

Se supponiamo la condizione meno restrittiva che le D_i non possano esser nulle insieme in alcun punto *interno* dell'intervallo ab, l'integrazione potrà farsi, e quindi la relazione (β) sussisterà, per qualunque intervallo contenuto completamente *nell'interno* di ab.

Importa osservare che il teorema di Peano può, nei casi più ordinari, sostituire abbastanza bene quello più generale riconosciuto inesatto.

L'insieme dei posti-zero d'una funzione continua è *chiuso*, cioè contiene i propri punti-limiti. Se inoltre una funzione è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di qualunque punto d'un intervallo ab, esclusi tutt'al più gli estremi, l'insieme I dei punti dell'intervallo in cui essa si annulla non può avere altri punti-limiti che gli estremi dell'intervallo stesso; infatti, se un punto interno P fosse punto-limite di I, esso apparterrebbe ad I, ed è facile vedere, coll'applicazione ripetuta del teorema di Rolle, che in P sarebbero nulle, oltre la funzione, anche le sue derivate di tutti gli ordini, sicchè la funzione sarebbe nulla in tutto l'intervallo. Ne segue che in ogni intervallo contenuto *nell'interno* di ab è compreso soltanto un numero finito di posti-zero della funzione.

Dopo ciò supponiamo le n funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno di ogni punto d'un certo intervallo ab, esclusi tutt'al più gli estremi. La stessa proprietà apparterrà alle loro derivate di tutti gli ordini, ed anche — come è facile vedere — a tutti i minori del loro wronskiano W, ed alla funzione M. Se dunque W è nullo in tutto l'intervallo ab, o M sarà parimenti nullo in tutto ab, o avrà soltanto un numero finito di posti-zero in qualunque intervallo *interno* ad ab.

Nel secondo caso, se $a'b'$ è un intervallo qualunque interno ad ab, i posti-zero di M in esso contenuti lo divideranno in un numero finito di tratti, per tutti i punti di ciascuno dei quali avrà luogo una relazione lineare tra le y. Tale relazione potrà naturalmente essere diversa pei diversi intervalli come ab. Così, nell'esempio di Peano, si ha $y_1 - y_2 = 0$ in ogni tratto posto a destra dell'origine, $y_1 + y_2 = 0$ in ogni tratto posto a sinistra di essa.

Nel primo caso invece saranno nulle nell'intero intervallo tutte le $D_1, D_2, \dots, D_n$. Designiamo con D_{hk} il minore (preso con segno opportuno) ottenuto sopprimendo le colonne h-esima e k-esima nella matrice formata colle prime $n-2$ linee di W. Supposto che non tutti i determinanti D_{hk} sieno nulli in ogni punto dell'intervallo ab, e p. es. che non lo sia $D_{n-1,n}$, il wronskiano D_n delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sarà nullo in tutto l'intervallo ab senza che lo sieno tutti i complementi algebrici degli elementi della sua ultima linea; e quindi ogni intervallo interno ad ab potrà dividersi in un numero finito di tratti in ciascuno dei quali avrà luogo una relazione lineare tra le $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Se le D_{hk} sono nulle in tutto l'intervallo ab, si dovrà passare ai minori d'ordine $n-3$, e così di seguito. Infine, se tutti i minori di secondo ordine formati colle due prime linee di W sono nulli in tutto l'intervallo ab, o le $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono nulle in tutto questo intervallo, oppure ogni intervallo interno ad esso può dividersi in un numero finito di parti, in ciascuna delle quali sussiste una relazione lineare fra due delle y.

Concludendo:

Se le funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno di qualunque punto interno all'intervallo ab, e se il loro wronskiano è nullo per tutti i punti di esso, qualunque intervallo interno all'intervallo ab potrà dividersi in un numero finito di parti, in tutti i punti di ciascuna delle quali sussisterà una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non nulli fra tutte od alcune delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Matematica. — *Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili.* Nota di G. Vivanti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla determinazione simultanea delle conducibilità termiche ed elettrica dei metalli a differenti temperature.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Molti dei fisici che determinarono i coefficienti di conducibilità termiche dei metalli, tentarono pure di dedurne coi loro metodi le variazioni in funzione della temperatura. I risultati però non furono mai concordanti. Io credo che la causa dei non dubbî errori sia da ricercarsi principalmente nella difficoltà di applicare a differenti temperature l'uno dei metodi fin ora adoperati.

Il prof. H. F. Weber, del Politecnico di Zurigo, consigliò nelle sue lezioni di tentare la determinazione del coefficiente di temperatura della conducibilità termica dei metalli usando per riscaldarli la corrente elettrica, onde avere per qualsiasi temperatura dell'ambiente la stessa forma di riscaldamento. È facile, in base a questa idea, di sviluppare un metodo di misura che, oltre i coefficienti di conducibilità termica esterna ed interna, permetta di dedurre il coefficiente di conducibilità elettrica a differenti temperature. Si ha così il vantaggio di poter vedere se esista una relazione, non solo fra le conducibilità elettrica e termica (interna), su cui si è già molto discusso, ma anche fra le variazioni di esse in funzione della temperatura.

Nell'Istituto fisico del Politecnico di Zurigo cominciai alcune misure che ho ora compiute nell'Istituto fisico dell'Università di Roma, e di cui comunicherò quanto prima i risultati. In questo Rendiconto mi limiterò allo sviluppo teorico del metodo impiegato.