ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

l' intervallo ab, o le $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono nulle in tutto questo intervallo, oppure ogni intervallo interno ad esso può dividersi in un numero finito di parti, in ciascuna delle quali sussiste una relazione lineare fra due delle y.

Concludendo:

Se le funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono sviluppabili in serie di Taylor nell' intorno di qualunque punto interno all' intervallo ab, e se il loro wronskiano è nullo per tutti i punti di esso, qualunque intervallo interno all' intervallo ab potrà dividersi in un numero finito di parti, in tutti i punti di ciascuna delle quali sussisterà una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e non nulli fra tutte od alcune delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Matematica. — *Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili.* Nota di G. Vivanti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla determinazione simultanea delle conducibilità termiche ed elettrica dei metalli a differenti temperature.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Molti dei fisici che determinarono i coefficienti di conducibilità termiche dei metalli, tentarono pure di dedurne coi loro metodi le variazioni in funzione della temperatura. I risultati però non furono mai concordanti. Io credo che la causa dei non dubbî errori sia da ricercarsi principalmente nella difficoltà di applicare a differenti temperature l' uno dei metodi fin ora adoperati.

Il prof. H. F. Weber, del Politecnico di Zurigo, consigliò nelle sue lezioni di tentare la determinazione del coefficiente di temperatura della conducibilità termica dei metalli usando per riscaldarli la corrente elettrica, onde avere per qualsiasi temperatura dell' ambiente la stessa forma di riscaldamento. È facile, in base a questa idea, di sviluppare un metodo di misura che, oltre i coefficienti di conducibilità termica esterna ed interna, permetta di dedurre il coefficiente di conducibilità elettrica a differenti temperature. Si ha così il vantaggio di poter vedere se esista una relazione, non solo fra le conducibilità elettrica e termica (interna), su cui si è già molto discusso, ma anche fra le variazioni di esse in funzione della temperatura.

Nell' Istituto fisico del Politecnico di Zurigo cominciai alcune misure che ho ora compiute nell' Istituto fisico dell' Università di Roma, e di cui comunicherò quanto prima i risultati. In questo Rendiconto mi limiterò allo sviluppo teorico del metodo impiegato.

Si prenda un filo di lunghezza l e di piccola sezione circolare di superficie q e di perimetro p. Siano: k il coefficiente di conducibilità termica interna di esso, h quello di conducibilità esterna, $\frac{1}{\omega}$ il coefficiente di conducibilità elettrica e ϱ e c i coefficienti di densità e calore specifico, tutti presi nel sistema *c. g. s.* e grado centigrado.

Sia u la temperatura, fissando come zero quella dell' ambiente, i la corrente elettrica che attraversa il filo ed infine x la coordinata corrente che determina la posizione di ogni sezione di esso, stabilendo per i due capi i valori $x = o$ ed $x = l$.

L' equazione differenziale del movimento del calore nel filo sarà evidentemente la seguente:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{k}{c\varrho} - u\frac{hp}{cq\varrho} + i^2\frac{\omega}{\mathrm{E}cq^2\varrho},$$

in cui E indica l' equivalente meccanico della caloria *e* t il tempo.

Per poter determinare facilmente le costanti di integrazione, stabiliamo che al principio dell' esperienza tutti i punti del filo debbano avere la temperatura zero e che i capi di esso debbano inoltre conservare questa temperatura. La soluzione dell' equazione (1) dovrà dunque soddisfare a queste condizioni:

(2) per $x = 0$ . . . . $u = 0$ per tutti i tempi
(3) per $x = l$ . . . . $u = 0$ " " "
(4) per $t = 0$ . . . . $u = 0$ per tutte le x.

Osserviamo che la temperatura tende col crescere del tempo t ad uno stato stazionario, che indicheremo con S. Facciamo quindi $u = \mathrm{S} + \mathrm{V}$, intendendo per V la parte di u variabile col tempo. L' equazione (1) colle condizioni (2), (3), (4) si dividerà nelle due seguenti equazioni colle rispettive condizioni:

(1′)	$0 = \frac{d^2\mathrm{S}}{dx^2} - \mathrm{S}\frac{hp}{kq} + i^2\frac{\omega}{kq^2\mathrm{E}}$	$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} - \frac{hp}{q\varrho c}\mathrm{V}$	(1″)
(2′)	per $x = 0$ . . . $\mathrm{S} = 0$	per $x = 0$ . . . $\mathrm{V} = 0$	(2″)
(3′)	per $x = l$ . . . $\mathrm{S} = 0$	per $x = l$ . . . $\mathrm{V} = 0$	(3″)
		per $t = 0$ . . . $\mathrm{V} = -\mathrm{S}$	(4″)

Stato stazionario. Integriamo primieramente l' equazione (1′) colle condizioni (2′) e (3′). Facciamo sparire il termine $i^2\frac{\omega}{kq^2\mathrm{E}}$ ponendo:

$$(5') \qquad \mathrm{S} = \mathrm{S}' + \mathrm{C}\,, \text{ ove } \mathrm{C} = i^2\frac{\omega}{\mathrm{E}qhp}$$

L'equazione (1') diverrà:

$$0 = \frac{d^2S'}{dx^2} - S' \frac{hp}{kq}.$$

L'integrale di essa sarà:

$$S' = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{-\lambda x} \text{ ponendo } \lambda = \sqrt{\frac{hp}{kq}}.$$

Per mezzo delle (2'), (3') e (5') si determinano le costanti:

$$A = -C \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}}, \quad B = +C \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}}.$$

Il valore dello stato stazionario sarà dunque dato dalla formula:

$$S = C - C \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x} + e^{\lambda(l-x)} - e^{-\lambda(l-x)}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}},$$

la quale non varia mutando x in $l - x$, come è fisicamente evidente.

Osserviamo ancora che nel punto di mezzo si ha:

$$S_m = C - C \frac{2}{e^{\lambda \frac{l}{2}} + e^{-\lambda \frac{l}{2}}}.$$

Stato variabile. Per integrare l'equazione (1'') facciamo $V = T \,.\, X$, dove T è funzione del solo tempo t ed X della sola coordinata x. Indicando con α^2 una costante positiva, la (1'') si dividerà per le regole note nelle due equazioni seguenti:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\alpha^2 \frac{k}{\varrho c} - \frac{hp}{q\varrho c}, \quad \frac{d^2X}{d^2x} + \alpha^2 X = 0,$$

i cui integrali sono rispettivamente:

$$T = C\, e^{-\left(\alpha^2 \frac{k}{c\varrho} + \frac{hp}{q\varrho c}\right) t}, \quad X = A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x.$$

La soluzione della (1'') avrà quindi la forma:

$$V = (A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x)\, e^{-\left(\alpha^2 \frac{k}{c\varrho} + \frac{hp}{q\varrho c}\right) t},$$

ove A e B indicano due costanti arbitrarie.

La condizione (2'') esige che B sia nullo; la (3'') esige che $\operatorname{sen} \alpha l$ sia pure nullo; quest'ultima condizione determina un'infinità di valori di α compresi nella formula: $\alpha = \frac{n\pi}{l}$, ove n indica un numero intero positivo. La soluzione generale sarà quindi la somma delle infinite soluzioni particolari, che risultano per i singoli valori di n. Finalmente la condizione (4'') sarà soddisfatta se determineremo le costanti A_1, A_2, ecc. in modo che sia soddisfatta la equazione:

$$-C+\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}+e^{\lambda(l-x)}-e^{\lambda(l-x)}}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x .$$

Col metodo di Fourier si ha:

$$A_n\int_0^l \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{l}x\,dx=-C\int_0^l \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx+\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx$$
$$+\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda(l-x)}-e^{-\lambda(l-x)})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

Siccome si ha:

$$A_n\int_0^l \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{l}x\,dx=A_n\frac{l}{2},$$

$$C\int_0^l \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx=C\frac{2l}{n\pi} \quad \text{per } n \text{ dispari,}$$
$$=0 \quad \text{per } n \text{ pari.}$$

$$\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx=C\,2l\,\frac{n\pi}{l^2\lambda^2+n^2\pi^2} \quad \text{per } n \text{ dispari,}$$
$$=0 \quad \text{per } n \text{ pari,}$$

$$\frac{C}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}}\int_0^l (e^{\lambda(l-x)}-e^{-\lambda(l-x)})\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\,dx=0 \quad \text{per ogni } n;$$

si trova:

$$A_n=-\frac{4C}{n\pi}\,\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+\pi^2n^2} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$
$$=0 \quad \text{per } n \text{ pari.}$$

È quindi determinata anche la parte variabile V.

Osserviamo che i coefficienti A_n diminuiscono e gli esponenti negativi di e aumentano rapidamente col crescere di n. Basterà quindi un tempo relativamente breve perchè tutti i termini con n superiore a 3 divengano trascurabili rispetto ai primi e l'espressione della temperatura divenga:

$$u=S-\frac{4C}{\pi}\,\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}x\,e^{-\left(\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{\rho c}+\frac{hp}{q\rho c}\right)t}-\frac{4C}{3\pi}\,\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+9\pi^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{l}x\,e^{-\left(\frac{9\pi^2}{l^2}\frac{k}{\rho c}+\frac{hp}{q\rho c}\right)t}.$$

In uno dei punti poi aventi la coordinata $x=\frac{l}{3}$ oppure $x=\frac{2l}{3}$, l'ultimo termine a destra di questa espressione sarà identicamente nullo e si avrà la temperatura espressa dalla formula:

$$(u)_{\frac{l}{3}}=(S)_{\frac{l}{3}}-\frac{2C}{\pi}\,\frac{\lambda^2l^2}{\lambda^2l^2+\pi^2}\sqrt{3}\,e^{-\left(\frac{\pi^2}{l^2}\frac{k}{c\rho}+\frac{kp}{q\rho c}\right)t}. \tag{6}$$

Se in questo punto si farà una serie di misure di temperatura ad uguali intervalli di tempo δt e se ne formeranno i decrementi logaritmici per ogni ν intervalli, la media di essi, che diremo N sarà uguale alla quantità:

$$\left(\frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{k}{c\varrho}+\frac{hp}{qc\varrho}\right)\nu\,\delta t\,.$$

Osservando che $\lambda^2=\frac{hp}{kq}$ si deduce:

$$\text{(I)}\qquad \mathrm{N}=\frac{1}{l^2}\,\frac{k}{c\varrho}\,(\pi^2+l^2\lambda^2)\;\nu\,\delta t\,.$$

Dalla serie delle osservazioni eseguite, quando si avrà calcolato il decremento logaritmico, si potrà pure ottenere una serie di valori del coefficiente di e nella (6). Sia M il valore medio dedotto; si avrà l'equazione:

$$\text{(II)}\qquad \mathrm{M}=\frac{2\mathrm{C}}{\pi}\,\frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2+\pi^2}\sqrt{3}\,.$$

Finalmente osservando anche la temperatura stazionaria nel punto di mezzo si avrà pure l'equazione:

$$\text{(III)}\qquad (\mathrm{S})_m=\mathrm{C}-\frac{2\mathrm{C}}{e^{\lambda\frac{l}{2}}+e^{-\lambda\frac{l}{2}}}\,,$$

la quale unitamente alle (I) e (II) servirà per dedurre $\lambda^2 l^2$, k e C.

Coll'aiuto delle relazioni: $\lambda^2=\frac{hp}{kp}$ e $\mathrm{C}=i^2\,\frac{\omega}{\mathrm{E}qhp}$ si dedurrà k, h ed ω.

Resta quindi pienamente dimostrata la possibilità di dedurre simultaneamente i due coefficienti di conducibilità termica, e quello di conducibilità elettrica relativi ad un filo metallico.

Quando lo stato stazionario delle temperature è stato raggiunto, si può interrompere la corrente, osservare come procede il raffreddamento del filo e dedurre in modo analogo al precedente i coefficienti voluti. Infatti il problema si riduce all'integrazione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\varrho}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{hp}{c\varrho q}\,u$$

avendo cura di soddisfare alle condizioni:

per $x=0$ . . . . $u=0$ per tutti i tempi
per $x=l$ . . . . $u=0$ " " "
per $t=0$ . . . . $u=\mathrm{S}$ per tutte le x.

Per l'analogia di questa equazione e delle sue condizioni con quella determinante lo stato variabile V, si deduce la seguente soluzione:

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{A}_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \; e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c\rho} + \frac{hp}{c\rho q}\right) t},$$

ove i coefficienti A_n hanno lo stesso valore assoluto, ma i segni contrarî dei coefficienti A_n dello stato variabile V. Basterà quindi un tempo assai breve perchè la temperatura del filo in uno dei punti $x = \frac{l}{3}$ oppure $x = \frac{2l}{3}$ sia espressa dal solo primo termine della serie. In modo analogo al precedente si potranno stabilire le equazioni (I), (II), (III) e dedurne i coefficienti voluti.

Nelle misure recenti sulla conducibilità termica di un filo metallico, si evitò di fondare il metodo su osservazioni di temperatura stazionaria in punti di cui si debbano misurare le coordinate. Infatti, riscaldando il filo ad una estremità, come fin ora si fece, si produce in esso una ripartizione della temperatura espressa dalla formula generale

$$u = \mathrm{A}\, e^{-mx}.$$

Essendo la u una funzione rapidamente decrescente col crescere di x, basterà un piccolo errore nella determinazione dell'ordinata del punto in cui si misura la temperatura (errore che in pratica non si può mai evitare), per produrre un assai grave errore nella determinazione dei coefficienti.

Osserviamo però che il metodo esposto non esige che la determinazione delle temperature stazionarie nel punto di mezzo del filo e nel punto corrispondente ad $x = \frac{l}{3}$, oppure $x = \frac{2l}{3}$. Ora, siccome per il nostro speciale metodo di riscaldamento, la temperatura del filo varia assai lentamente nelle vicinanze dei detti punti, un piccolo errore nella collocazione del termometro o della pila elettrica non avrebbe che un'influenza minima sui risultati, come è facile verificare. Per esempio, per un filo di ferro di 20 cm. di lunghezza e 0,4 cm. di diametro, l'errore di un millimetro nella collocazione della pila termoelettrica in ciascuno dei punti considerati produrrebbe un errore di $\frac{1}{200}$ circa nel computo di ω ed h ed un errore del tutto trascurabile nel computo di k.