ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Se nella formula (19) poniamo $\alpha_0 = -\xi$ si ha

$$A(\varphi\psi) = -\xi\varphi(\psi) + \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)$$

e se in questa supponiamo inoltre

$$\xi = 0\,,$$

avremo

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi)$$

che è il teorema di moltiplicazione per la derivazione ordinaria.

A questo teorema si poteva giungere direttamente dalla formula (18) supponendovi tutti i coefficienti $a_{r.s}^{m.n}$ identicamente nulli.

Se invece, in questa stessa formula si suppone che il primo coefficiente a sia eguale all' unità e che sieno nulli tutti gli altri, si ha il teorema di moltiplicazione

$$A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) + \psi A(\varphi) + A(\varphi)\,A(\psi)$$

che appartiene alla operazione di differenziazione finita:

$$\varDelta\,\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)\,.$$

Matematica. — *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali del secondo ordine con due variabili indipendenti.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. In questa Nota, che ho l' onore di presentare alla R. Accademia, mi propongo di far conoscere un metodo molto elementare per dedurre e studiare le trasformate differenziali di una equazione differenziale del secondo ordine con due variabili indipendenti. I risultati che si ottengono sono, per l'equazione lineare, quegli stessi ottenuti dai signori Darboux e R. Liouville in casi particolari e dal prof. Niccoletti nel caso generale [1]: per quelle

[1] *Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine.* Pisa, tip. Nistri, 1897. In questa Memoria si trovano le altre indicazioni sull'argomento che io ometto per brevità.

non lineari, quegli stessi che si possono ottenere coll' applicazione del metodo d'integrazione che il sig. Darboux spiegò nella notissima Memoria del 1870, pubblicata negli Annales de l'Ecole Normale Supérieure.

Abbiasi un' equazione generale del secondo ordine:

$$f(x\,,y\,,z\,,p\,,q\,,r\,,s\,,t)=0\,,$$

nella quale compariscono tutti gli argomenti indicati, di significato ben noto. Si supponga d'aver trovato, quando è possibile, una trasformazione di contatto capace di trasformare l'equazione proposta in un'altra mancante di una qualunque delle coppie d'argomenti:

$$\begin{array}{lcl} z\,,q & , & z\,,p \\ z\,,t & , & z\,,r \\ q\,,t & , & p\,,r\,. \end{array}$$

Considerando il primo caso, l'equazione si riduce alla forma

$$\varphi(x\,,y\,,p\,,r\,,s\,,t)=0. \tag{1'}$$

Derivando rispetto ad x, si ottiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0\,, \tag{2}$$

e ricavando t dalla (1′), poi sostituendo in (2), questa assume la forma

$$A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+N=0\,, \tag{3}$$

ove A , B , C , N sono funzioni di $x\,,y\,,p\,,\frac{\partial p}{\partial x}\,,\frac{\partial p}{\partial y}$. È evidentemente una equazione del secondo ordine in p, lineare nelle derivate seconde, ed è una trasformata differenziale della (1′). Il suo integrale è

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}\,,$$

essendo z l'integrale della (1′); quindi, integrata la (1′) resta integrata anche questa. Ma viceversa: se si riesce ad integrare la (3), si può determinare mediante quadrature la z che soddisfa alla (1′). Infatti, noto p, si ricaverà t dalla (1′) e si avrà

$$q=\int\left(\frac{\partial p}{\partial y}\,dx+t\,dy\right).$$

Quando l'equazione proposta si riducesse a mancare di una delle coppie d'argomenti $z\,,t$ o $q\,,t$, il ragionameuto fatto vale ancora, avvertendo di eliminare poi rispettivamente q o z; se invece si riducesse a mancare di una delle altre tre coppie

$$z, p \quad , \quad z, r \quad , \quad p, r,$$

bisognerebbe derivare rispetto ad y ed eliminare poi rispettivamente r, p o z.

Sull' equazione (3) si potrebbe ora applicare nuovamente il ragionamento fatto sulla (1), e così via; ma io non voglio in questa Nota trattenermi su considerazioni generali: mi limito a trattare alcune equazioni di forma speciale ed importante, per le quali il modo di trasformazione indicato conduce all' integrazione completa od a risultati notevoli.

2. Consideriamo l' equazioni della forma

$$f(r, s\, t) = 0, \tag{4}$$

le quali mancano contemporaneamente delle coppie d' argomenti z, p e z, q. Derivando rispetto ad x, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Posto $p = z'$ ed indicando colle solite lettere, ma accentate, le derivate di z', l' equazione precedente dopo l' eliminazione di t assume la forma:

$$\mathrm{A}(p', q')\, r' + \mathrm{B}(p', q')\, s' + \mathrm{C}(p', q')\, t' = 0.$$

Questa equazione ammette sempre due integrali primi con una costante arbitraria [1], appartenenti a caratteristiche diverse, ed i casi d' integrazione col metodo di Monge ed Ampère si possono facilmente discutere. Questi casi, come ha mostrato il sig. De Boer [2], corrispondono a quelli con cui l' equazione (4) è integrabile col metodo di Darboux.

3. Consideriamo ora l' equazioni della forma

$$f(r, s, z) = 0, \tag{5}$$

che supporremo risolute rispetto a z:

$$z + \varphi(r, s) = 0.$$

Derivando rispetto ad x e ponendo $p = z'$, si ottiene colle solite notazioni:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q'} s' + \frac{\partial \varphi}{\partial p'} r' + z' = 0,$$

giacchè $\varphi(r, s) = \varphi(p', q')$.

(1) Goursat, *Equations différentielles du second ordre*. Tom. I.

(2) De Boer, Arch. Néerl. XXVII (1893); W. Speckman, Arch. Néerl. XXVII.

Le caratteristiche di questa equazione sono definite dai due sistemi differenziali seguenti:

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial q'}dx - \dfrac{\partial\varphi}{\partial p'}dy = 0 \\ z'\,dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p'}dp' = 0 \\ dz' - p'dx - q'dy = 0 \end{cases} \qquad (b)\quad \begin{cases} dy = 0 \\ z'\,\partial x + \dfrac{\partial\varphi}{\partial q'}dq' + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p'}dp' = 0 \\ dz' - p'dx - q'dy = 0 \end{cases}$$

Il sistema (b) ammette l'integrale $y =$ cost qualunque sia φ, mentre il sistema (a) non ne ammette in generale. Però, eliminando fra le sue equazioni dx e dy, si giunge all'equazione

$$z'\,dz' + \left(p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} - q'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\right)dp' = 0,$$

la quale si può integrare quando sia

$$p'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} - q'\frac{\partial\varphi}{\partial q'} = \mathrm{F}(p').$$

Ma di qui si trae che $\varphi(p', q')$ deve avere la forma

$$\psi_1(p') + \psi_2(p'q'),$$

essendo ψ_1 e ψ_2 due funzioni qualunque rispettivamente degli argomenti p' e $p'q'$; onde si conclude: L'equazioni riducibili alla forma

$$z = \psi_1(r) + \psi_2(rs)$$

si possono trasformare in altre aventi due integrali primi con una costante arbitraria ed appartenenti a caratteristiche diverse. Altrettanto si può dire per l'equazioni del tipo:

$$z = \psi_1(t) + \psi_2(ts).$$

4. La sola equazione della forma $f(s, z) = 0$ che si possa integrare dopo una prima trasformazione è quella di Liouville

$$s = e^z.$$

Derivando rispetto ad x e poi eliminando z, si trova

$$s' = z'q' \qquad (p = z'),$$

la quale si sa integrare. Come ha notato il sig. Darboux nella Memoria citata, l'equazione di Liouville è la più semplice fra quelle della forma $f(s, z) = 0$ che si possono integrare col metodo da lui esposto.

5. Per l'equazione della forma

$$(6)\qquad s + ap + bq + cz = 0,$$

ove a, b, c sono funzioni soltanto di x ed y, il metodo di trasformazione indicato coincide con quello di Laplace e Lewy. Infatti, posto $z = z_1 e^{-\int a dy}$, l'equazione diventa

$$s_1 + b_1 q_1 + c_1 z_1 = 0 ;$$

dalla quale derivando rispetto ad y ed eliminando z, si trae un'equazione della forma (6) che ha per integrale

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z e^{\int a dy}}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) e^{\int a dy} .$$

È la trasformazione di Laplace, a meno di un fattore.

Se invece coll'aiuto di una soluzione particolare σ della proposta si elimina da essa il termine in z, poi si deriva ad esempio rispetto ad y e si elimina p, si trova un'equazione della stessa forma che ha per integrale

$$z' = \frac{\partial \frac{z}{\sigma}}{\partial y} .$$

È la trasformazione di Lewy.

Nella stessa maniera si vede subito che per l'equazioni del tipo parabolico non esiste una trasformazione analoga a quella di Laplace, ma esiste quella di Lewy.

Consideriamo adesso l'equazione più generale

$$ar + 2bs + ct + lp + mq + nz = 0 , \quad (b^2 - ac \neq 0)$$

lineare rispetto a z ed alle sue derivate. È sempre possibile ridurla alla forma

$$a_1 r_1 + 2b_1 s_1 + l_1 p_1 + n_1 z_1 = 0$$

con una trasformazione del gruppo

$$\xi = x , \quad \eta = \eta(x , y) , \quad z_1 = \lambda(x , y) z .$$

Derivando allora rispetto a ξ ed eliminando poi z_1, si trova un'equazione pure lineare ed omogenea che ha l'integrale

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial \xi} ,$$

ossia, tornando alle antiche variabili,

$$z' = \alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \beta \frac{\partial z}{\partial y} + \gamma z .$$

È la trasformazione di Laplace generalizzata da Légendre [1].

Supponiamo invece di conoscere due soluzioni particolari μ e λ dell'equazione proposta; allora è possibile, operando successivamente il cambiamento di funzione

$$z = \lambda . z_1$$

ed il cambiamento di variabile

$$\xi = x\,, \quad \eta = \frac{\mu(x\,,y)}{\lambda(x\,,y)},$$

ridurre l'equazione alla forma:

$$a_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \xi^2} + 2b_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \xi\, \partial \eta} + c_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \eta^2} + l_1 \frac{\partial z_1}{\partial \xi} = 0\,.$$

Se questa si deriva rispetto a ξ e poi si elimina $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$, si giunge ad una equazione pure lineare ed omogenea, la quale ha per integrale

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial \xi},$$

cioè, tornando alle antiche variabili,

$$z' = \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}\,.$$

Questa espressione di z' si annulla per $z = \lambda$ e $z = \mu$, cioè per due soluzioni della proposta ed è da esse definita. Se poi si applicasse la trasformazione indicata n volte di seguito, si giungerebbe ad un'equazione della stessa forma che ammette per integrale un'espressione lineare in z e nelle sue derivate fino a quelle d'ordine n, la quale si annulla per $2n$ soluzioni particolari della proposta.

Si ritrovano così le trasformate studiate dal Darboux e dai sig. R. Liouville e Niccoletti; e si vede come il metodo adoperato si presti molto semplicemente per dedurre tutti i teoremi ottenuti da questi autori.

6. Infine mi permetto d'indicare una trasformazione *integrale*, la quale è una generalizzazione di quella d'Imschenetsky [2] e si può riguardare, almeno in molti casi, come l'inversa della precedente.

Abbiasi l'equazione lineare nelle derivate seconde di z

$$\mathrm{A}r + 2\,\mathrm{B}s + \mathrm{C}t + \mathrm{M} = 0,$$

(1) Vedi Imschenetsky, *Étude sur les méthodes d'intégration des équations du second ordre* . . . ecc., traduzione di Hoüel, pag. 61.

(2) Memoria citata, pag. 50, 51.

ove A, B, C, M sono funzioni di x, y, p e q. Dicendo λ_1 e λ_2 la radici dell' equazione

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0,$$

l' equazioni delle caratteristiche sono:

$$a)\ \begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ dy - \lambda_1 dx = 0 \\ A\lambda_1 dp + Cdq + M\lambda_1 dx = 0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ dy - \lambda_2 dx = 0 \\ A\lambda_2 dp + Cdq + M\lambda_2 dx = 0 \end{cases}$$

Consideriamo uno qualunque di questi sistemi, ad esempio il sistema a). È chiaro che si può sempre, ed in infiniti modi, formare una combinazione lineare delle due ultime equazioni in guisa da potersi mettere sotto la forma

$$\lambda_1 d_x U + d_y V = 0,$$

essendo U e V due funzioni di x, y, p, q, e rappresentando con d_x, d_y i differenziali rispetto ad x, p, q e ad y, p, q rispettivamente. Allora il sistema a) si scrive:

$$\begin{cases} dz - pdx - qdy = 0 \\ dy - \lambda_1 dx = 0 \\ d_y V + \lambda_1 d_x U = 0 \end{cases}$$

Da questo sistema si risale all' equazione eliminando $\frac{dy}{dx}$ tra le equazioni

$$dy - \lambda_1 dx = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy - \lambda_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx = 0,$$

ove le parentesi stanno ad indicare che anche p e q si riguardano funzioni di x ed y. Si trova

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0.$$

Ottenuta questa forma dell' equazione proposta, poniamo

$$U(x, y, p, q) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$V(x, y, p, q) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

poi risolviamo queste equazioni rispetto a p e q e scriviamo la condizione d' integrabilità. Si ottiene un' equazione del secondo ordine in φ, il cui integrale si ha per quadratura quando sia noto quello della proposta.