ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

si riflettono o diffondono sensibilmente nell'interno dei tubi che percorrono; e la seconda è, che gli X, attraversando i tubi, non perdono, punto della loro efficacia fotografica, ed assai probabilmente non vi perdono neanche della loro virtù scaricatrice; viene così, in via indiretta, riconfermata la spiegazione data dell'azione dei tubi sulla scarica dell'elettroscopio.

Matematica. — *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

È noto il metodo di Bernouilli per la ricerca approssimata delle radici di un'equazione algebrica, mediante il rapporto di due somme consecutive di potenze simili. Nella presente communicazione, espongo un metodo informato allo stesso principio e che serve a sostituire, in via approssimata, l'integrale di un'equazione lineare alle differenze finite del primo ordine a quello di un'equazione lineare di ordine qualunque.

1. Abbiasi l'equazione alle differenze finite

$$(1)\quad \varphi(x+n)+\alpha_1(x)\varphi(x+n-1)+\cdots+\alpha_{n-1}(x)\varphi(x+1)+\alpha_n(x)\varphi(x)=0,$$

e se ne rappresenti con $F(\varphi)$ il primo membro, forma lineare alle differenze; accanto a questa si consideri l'altra

$$(2)\quad \begin{aligned}\alpha_n(x+n)\,\varphi(x+n)+\alpha_{n-1}\,(x+n-1)\,\varphi(x+n-1)+\cdots\\ +\alpha_1(x+1)\,\varphi(x+1)+\varphi(x)=0,\end{aligned}$$

e si rappresenti con $F_1(\varphi)$ il suo primo membro, che è detto *forma aggiunta* di F [1]. Sia

$$(3)\quad \mu_1\,,\,\mu_2\,,\ldots\,\mu_n$$

un sistema fondamentale d'integrali di $F_1=0$; è noto che un sistema fondamentale

$$(4)\quad \omega_1\,,\,\omega_2\,,\ldots\,\omega_n$$

di integrali di F si ottiene dagli elementi reciproci della prima linea del determinante

$$\begin{vmatrix} \mu_1(x-n+1) & \mu_2(x-n+1) & \ldots & \mu_n(x-n+1) \\ \mu_1(x-n+2) & \mu_2(x-n+2) & \ldots & \mu_n(x-n+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1(x) & \mu_2(x) & & \mu_n(x) \end{vmatrix}$$

[1] Ho considerato già da tempo (v. p. es. Mem. dell'Accad. di Bologna, serie IV, tomo X, 1890) l'equazione (2) accanto alla (1), che dicevo sua *inversa*. Le proprietà della forma aggiunta di una data si trovano svolte in una Nota del prof. Bortolotti (questi Rendiconti, serie V, tomo V, pag. 349, 1896).

divisi per il determinante stesso; è pure noto che gli integrali (3) di F_1 sono i moltiplicatori di F, sono cioè tali che

$$\mu_i F = \varDelta G_i\,, \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots n) \tag{5}$$

essendo $\varDelta$ il simbolo della differenza finita e G_i una forma lineare d'ordine $n-1$ (¹). Risulta subito, per le (5), che le G_i sono le forme determinate da

$$G_i(\omega_k) = \begin{cases} 0 & \text{per } i \gtrless k \\ 1 & \text{"} \ \ i = k\,, \end{cases} \quad (i\,, k = 1\,, 2\,, \ldots n)\,;$$

se dunque si vuole determinare una forma lineare $P(\varphi)$ alle differenze, dell'ordine $n-1$, che assuma per $\varphi = \omega_i$ la determinazione $\beta_i (i = 1\,, 2, \ldots n)$, essa sarà data da

$$P(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, G_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \varDelta^{-1} \mu_i\, F(\varphi)\,. \tag{6}$$

La formula così ottenuta è una formula di *interpolazione*, che si presenta, nello studio delle forme lineari alle differenze, come l'equivalente della nota formula di Lagrange per le funzioni razionali intere.

Se nella (6) si muta la F nella sua inversa F^{-1}, viene

$$PF^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \varDelta^{-1}\, \mu_i\, \varphi \ (^2)\,;$$

in particolare, se si fa $P = 1$, si ha per F^{-1} l'espressione

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \varDelta^{-1}\, \mu_i\, \varphi\,. \tag{7}$$

2. Posto, secondo una notazione usuale, $\theta\varphi(x) = \varphi(x+1)$, si ha per $\varDelta^{-1}$ lo sviluppo formale

$$\varDelta^{-1}\varphi = -\varphi - \theta\varphi - \theta^2\varphi - \cdots - \theta^\nu\varphi - \cdots,$$

questo sviluppo acquista poi significato effettivo se si sceglie la funzione φ in una classe — o campo funzionale — opportuna. Ad esempio, si possono prendere tutte le funzioni che in una striscia del piano x parallela all'asse reale, si mantengono in valore assoluto inferiori ad $a^{R(x)}$, dove a è un numero positivo minore d'uno ed $R(x)$ è la parte reale di x.

(¹) Bortolotti, loc. cit.

(²) Questa formula può, nell'algebra delle forme alle differenze finite, riguardarsi come l'analoga di quella che, nella teoria delle funzioni razionali, dà la scomposizione di un quoziente in frazioni semplici.

Applicando lo sviluppo trovato alla formula (7), φ essendo preso in un campo funzionale conveniente, la cui considerazione, per altro, non ha importanza in ciò che segue, si avrà per F^{-1} lo sviluppo

$$F^{-1}\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \theta^\nu \mu_i \, \theta^\nu \varphi \,, \tag{8}$$

in cui il coefficiente di $\theta^\nu \varphi$

$$\lambda_\nu = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \theta^\nu \mu_i \tag{8'}$$

rimane manifestamente inalterato se alle $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ si sostituisce un altro qualunque sistema fondamentale d'integrali di F e alle $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ il sistema corrispondente di moltiplicatori, le ω_i e le μ_i essendo fra loro controgredienti [1]. Da questa proprietà invariantiva delle λ_ν e dall'applicazione di un noto teorema di Appell, il quale è stato dato per le forme differenziali lineari [2], ma la cui estensione alle forme lineari alle differenze non presenta la minima difficoltà, risulta che le λ_n si possono esprimere razionalmente in funzione dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ della forma F e delle $\theta\alpha_1, \theta^2\alpha_1, \ldots$. Queste espressioni si possono calcolare per via ricorrente [3] e siano esse

$$\lambda_\nu = \lambda_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \theta\alpha_1, \theta\alpha_2, \ldots) \,. \tag{9}$$

3. Si faccia ora l'ipotesi che i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ di F tendano, quando x va all'infinito nella direzione dell'asse reale del suo piano e nel senso positivo, ai limiti rispettivi $a_1, a_2, \ldots a_n$. Allora, per un noto teorema del Poincaré [4], gl'integrali $\mu_i(x)$ dell'equazione (2) sono tali che

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\mu_i(x+\nu+1)}{\mu_i(x+\nu)} \right|$$

è uguale al modulo di una delle radici dell'equazione

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + 1 = 0 \tag{10}$$

ed in generale, al massimo di questi moduli. Supposto ora che fra le radici

[1] Bortolotti, loc. cit.

[2] Annales de l'École normale, serie II, tomo X, 1881. Cfr. anche Schlesinger, *Handbuch der lin. Differentialgleich.* Bd. I, pag. 38. Leipzig, Teubner, 1895.

[3] V. la mia *Algebra delle forme lineari alle differenze*, parte 3ª, Mem. dell'Accad. di Bologna, serie V, tomo V, 1895.

[4] American Journal of Math., tomo VII, 1884.

della (10), che si diranno $y_1, y_2, \ldots y_n$, ve ne sia una y_1 il cui modulo superi quello delle altre,

$$|y_1| > |y_2| \geq |y_3| \ldots \geq |y_n|;$$

è noto che fra i sistemi fondamentali della (2) è possibile di trovarne uno, $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots \bar{\mu}_n$, tale che sia

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\bar{\mu}_i(x+\nu+1)}{\bar{\mu}_i(x+\nu)} \right|$$

uguale ad $|y_1|$ per $i=1$, e per $i=2, 3, \ldots n$, uguale ad un altro dei moduli $|y_2| \ldots |y_n|$. Sia $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots \bar{\omega}_n$ il corrispondente sistema d'integrali della (1). Per la proprietà invariantiva delle λ_ν è affatto indifferente il sistema di integrali e di moltiplicatori con cui si immaginano formate le loro espressioni (8′), mentre quelle che sono da costruire effettivamente sono le espressioni razionali (9). Scrivendo dunque

$$\lambda_\nu = \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \, \theta^\nu \bar{\mu}_i$$

se ne dedurrà

$$\frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \, \theta^\nu \bar{\mu}_i}{\sum_{i=1}^{n} \theta\bar{\omega}_i \, \theta^\nu \bar{\mu}_i}$$

ossia

$$\frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1 \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_2}{\theta^\nu \bar{\mu}_1} + \cdots + \bar{\omega}_n \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_n}{\theta^\nu \bar{\mu}_1}}{\theta\bar{\omega}_1 + \theta\bar{\omega}_2 \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_2}{\theta^\nu \bar{\mu}_1} + \cdots + \theta\bar{\omega}_n \dfrac{\theta^\nu \bar{\mu}_n}{\theta^\nu \bar{\mu}_1}}. \tag{11}$$

Ma per le ipotesi fatte sulle μ_i, risulta che è

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{\mu_i(x+\nu+1)}{\mu_i(x+\nu)} : \frac{\mu_1(x+\nu+1)}{\mu_1(x+\nu)} \right| < 1$$

per $i=2, 3, \ldots n$, onde segue

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\theta^\nu \mu_i}{\theta^\nu \mu_1} = 0, \quad (i=2, 3, \ldots n).$$

Se ora si passa al limite, nella (4), per $\nu=\infty$, viene

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lambda_\nu}{\theta\lambda_{\nu-1}} = \frac{\bar{\omega}_1}{\theta\bar{\omega}_1};$$

segue da ciò che se consideriamo la (11) per valori di ν abbastanza grande, il suo primo membro, razionalmente esprimibile, mediante le (9), in funzione dei coefficienti di F, ci darà un'espressione approssimata per $\bar{\omega}_1 : \theta\bar{\omega}_1$, cioè la ω_1 ci sarà data, in via approssimata, come integrale di una equazione alle differenze del primo ordine: ed era questo appunto lo scopo che ci eravamo proposto.

Sarebbe interessante di tentare una estensione dello stesso metodo alle equazioni differenziali lineari.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

1. I caratteri di una superficie algebrica: *genere superficiale, numerico e geometrico, genere lineare e bigenere* (¹), verranno denotati rispettivamente con p_n, p_g, $p^{(1)}$, P.

Studieremo superficie

$$z^2 = f(xy)\,,$$

ossia *piani doppi* $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$, dove la *curva di diramazione* $f(xy) = 0$, se pure riducibile, può supporsi non contenere parti multiple.

Abbiamo dimostrato che per una superficie qualunque si ha

$$P \geq p_n + p^{(1)}$$

purchè esista sopra la superficie una effettiva *curva canonica* (d'ordine > 0), e risulta anche

$$P \leq p_g + p^{(1)}$$

se $p^{(1)} > 0$.

Abbiamo già determinato (²) tutti i piani doppi pei quali

$$p_n = P = 1$$

(e quindi anche $p_g = p^{(1)} = 1$), cioè i piani doppi che corrispondono a superficie di genere superficiale 1 sopra le quali *manca* la curva canonica.

Ci proponiamo ora di indicare, in questa Nota, la classificazione dei piani doppi per cui

$$p^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad P > 1\,,$$

fra i quali rientrano i piani doppi di genere superficiale 1 possedenti una effettiva curva canonica ellittica. La classificazione s'intende fatta assegnando i *tipi* cui i nominati piani doppi $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$ possono ricondursi con una trasformazione birazionale su x, y.

(¹) Cfr. il cap. VI della mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche.* Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896; oppure: Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats*... Mathematische Annalen, Bd. 48.

(²) *Sui piani doppi di genere uno.* Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896.