ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

segue da ciò che se consideriamo la (11) per valori di ν abbastanza grande, il suo primo membro, razionalmente esprimibile, mediante le (9), in funzione dei coefficienti di F, ci darà un' espressione approssimata per $\bar{\omega}_1 : \theta\bar{\omega}_1$, cioè la ω_1 ci sarà data, in via approssimata, come integrale di una equazione alle differenze del primo ordine: ed era questo appunto lo scopo che ci eravamo proposto.

Sarebbe interessante di tentare una estensione dello stesso metodo alle equazioni differenziali lineari.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

1. I caratteri di una superficie algebrica: *genere superficiale, numerico e geometrico, genere lineare e bigenere* (¹), verranno denotati rispettivamente con p_n, p_g, $p^{(1)}$, P.

Studieremo superficie

$$z^2 = f(xy),$$

ossia *piani doppi* $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$, dove la *curva di diramazione* $f(xy) = 0$, se pure riducibile, può supporsi non contenere parti multiple.

Abbiamo dimostrato che per una superficie qualunque si ha

$$P \geq p_n + p^{(1)}$$

purchè esista sopra la superficie una effettiva *curva canonica* (d' ordine > 0), e risulta anche

$$P \leq p_g + p^{(1)}$$

se $p^{(1)} > 0$.

Abbiamo già determinato (²) tutti i piani doppi pei quali

$$p_n = P = 1$$

(e quindi anche $p_g = p^{(1)} = 1$), cioè i piani doppi che corrispondono a superficie di genere superficiale 1 sopra le quali *manca* la curva canonica.

Ci proponiamo ora di indicare, in questa Nota, la classificazione dei piani doppi per cui

$$p^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad P > 1,$$

fra i quali rientrano i piani doppi di genere superficiale 1 possedenti una effettiva curva canonica ellittica. La classificazione s' intende fatta assegnando i *tipi* cui i nominati piani doppi $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$ possono ricondursi con una trasformazione birazionale su x, y.

(¹) Cfr. il cap. VI della mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche.* Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896; oppure: Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats...* Mathematische Annalen, Bd. 48.

(²) *Sui piani doppi di genere uno.* Memorie della Soc. It. d. Scienze, 1896.

I tipi dei piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$ e bigenere $P > 1$, sono i seguenti:

I. *Piani doppi con curva di diramazione* C_{2n}, *d'ordine* $2n(n > 3)$, *dotata d'un punto* O $(2n-4)^{plo}$ *o* $(2n-3)^{plo}$ *e*

1) nessun' altra singolarità

$$p_n = p_g = n - 2 \qquad P = 2n - 5;$$

2) un punto 4^{plo} distinto da O

$$p_n = p_g = n - 3 \qquad P = 2n - 6;$$

3) r coppie di punti 3^{pli} infinitamente vicini allineate con O (che è essenzialmente $(2n-4)^{plo}$) sopra rette facenti parte di C_{2n}

$$p_n = n - 2 - r, \quad p_g = p_n \text{ o } p_g = 0, \quad P = 2n - 5 - r;$$

4) r punti 4^{pli} infinitamente vicini ad O $(2n-4)^{plo}$, o r punti 3^{pli} infinitamente vicini ad O $(2n-3)^{plo}$ $(3r \leq 2n - 3)$

$$p_n = p_g = n - 2 - r \qquad P = 2n - 5 - 2r;$$

5) r punti 4^{pli} infinitamente vicini ad O (essenzialmente $(2n-4)^{plo}$) ed inoltre h (> 0) coppie di punti 3^{pli} infinitamente vicini ad O sopra rette per O facenti parte di C_{2n} $(4r + 3h \leq 2n - 4)$

$$p_n = p_g = n - 2 - r - h \qquad P = 2n - 5 - 2r - h.$$

II. *Piani doppi di cui la curva di diramazione si compone di r curve* C_{3s} *con 9 punti* s^{pli} *comuni (appartenenti ad un fascio di Halphen), ed eventualmente anche (per* r, s *dispari ed* $s > 1$) *della cubica* C_3 *che passa pei 9 punti*:

$$p_n = 1 \qquad p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right]$$

$$P = \frac{3r-4}{2} \qquad \text{per } s = 1 \quad (r \text{ pari}),$$

$$P = \left[\frac{3r}{2}\right] \qquad \text{per } s = 2$$

$$P = \left[\frac{3r+1}{2}\right] \qquad \text{per } s = 3$$

$$P = \left[\frac{3r+2}{2}\right] \qquad \text{per } s > 3.$$

Viene qui designato in generale col simbolo $[\varrho]$ il massimo intero contenuto nel numero ϱ.

È notevole il fatto mostrato dagli esempi in cui $P > p_g + p^{(1)}$, fatto che non ha riscontro per $p^{(1)} = 1$.

Si osservino in particolare nella categoria I i piani doppi del tipo 3, di genere 0 o 1, aventi il bigenere $P = n - r$ o risp. $P = n - 6$; il conto delle costanti ne prova l'effettiva esistenza almeno per $n \leq 16$ o risp. $n \leq 27$.

Per $n = 5$ si ottiene un piano doppio del tipo 3 che non rientra nelle condizioni dell'enunciato, ma offre esempio di una superficie coi generi $p_n = -1$ $p_g = 0$ di cui il bigenere vale $P = 1$, la quale non può quindi essere riferita ad una rigata ellittica come le superficie note fin qui coi caratteri $p_n = -1$ $p_g = 0$.

2. Alla ricerca dei piani doppi che hanno i caratteri assegnati

$$(p^{(1)} = 1, \quad P > 1),$$

dobbiamo far precedere alcune osservazioni relative alla determinazione delle curve canoniche e bicanoniche di un piano doppio di cui è data la curva di diramazione C_{2n} (d'ordine $2n$).

Le immagini delle curve canoniche, aumentate di eventuali componenti eccezionali che corrispondono a punti semplici della superficie, sono date da curve doppie C_{n-3} d'ordine $n-3$, assoggettate ad avere opportune singolarità nei punti multipli di C_{2n} [1].

Se la C_{2n} ha punti multipli ordinari, distinti, è facile vedere [2] che ogni punto $2i^{\text{plo}}$ per essa è $(i-1)^{\text{plo}}$ per le C_{n-3}, ed ogni punto $(2i+1)^{\text{plo}}$ di C_{2n} è del pari $(i-1)^{\text{plo}}$ per le dette C_{n-3}.

È noto, fino dagli esempi presentatisi al sig. Nöther, che le molteplicità imposte alle C_{n-3} possono aumentare se la C_{2n} ha punti multipli infinitamente vicini.

Volendo ricercare la molteplicità imposta alle C_{n-3} da un punto O, multiplo per C_{2n}, a cui sieno infinitamente vicini altri punti multipli, si faccia nel piano una trasformazione quadratica generale, avente in O un punto fondamentale. Allora ad O viene a corrispondere una retta fondamentale o, che entra come parte nella trasformata di C_{2n}, e precisamente deve essere contata un numero pari o dispari di volte secondo la molteplicità di O per C_{2n}. Nel primo caso, questa retta a, come componente della curva di diramazione d'un piano doppio può ugualmente esser tolta; ma nel secondo caso essa figura essenzialmente. una volta, unita alla residua parte C' della detta trasformata. Ora la C' verrà ad avere su a dei punti multipli che corrispondono ai punti multipli di C_{2n} cadenti nell'intorno di O, ed hanno le stesse molteplicità di essi. Queste molteplicità si trovano aumentate di 1 per la $C' + a$. Di qui, se si considerano le trasformate delle C_{n-3} e si ritorna poi alle C_{n-3}, si deduce che le molteplicità che loro impongono i punti multipli di C_{2n} che cadono nell'intorno (di 1° ordine) di O, sono da valutarsi come se questi punti avessero per C_{2n} una molteplicità superiore di 1 a quella effettiva, da cui può resultare che le C_{n-3} debbano avere nel punto O stesso una molteplicità maggiore di quella innanzi assegnata. Con ciò si è tenuto conto dei

(1) Cfr. il § 5 della mia Nota *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1896.

(2) Cfr. *Introduzione* . . . cap. VI.

punti multipli di C_{2n} che cadono nell' intorno di 1° ordine del punto O. Se si vuol tener conto dei punti multipli di essa che sono nell' intorno di 2° ordine, occorre far uso di una trasformazione quadratica applicata a C' prendendo come punto fondamentale uno dei punti multipli che la C' ha su a. Applicando successivamente questo processo di trasformazione, fino a *sciogliere* la singolarità della C_{2n} nel punto O, e ritornando sempre alla C_{2n}, è facile determinare in ogni singolo caso le molteplicità che vengono imposte alle C_{n-3} in O e nei punti multipli infinitamente vicini ad esso. Ma l' espressione generale di queste molteplicità, quando è data la composizione del punto O, si presenta un po' complicata, soprattutto nel caso in cui i punti multipli dell' intorno di O si succedano sopra rami non lineari.

Pel nostro scopo basta indicare il seguente resultato relativo al caso in cui i punti multipli di C_{2n}, infinitamente vicini ad ogni punto multiplo proprio O, si trovino sopra rami lineari passanti per O.

Indicando con $r, s, t, \ldots$ le molteplicità dei punti A, B, C... di C_{2n} che si succedono sopra un qualsiasi ramo lineare avente l' inizio in un punto r^{plo} O, e facendo uso del simbolo $[\varrho]$ per denotare la parte intera del numero ϱ, si ha:

Le C_{n-3} sono assoggettate alle condizioni di avere

1) la molteplicità $\left[\frac{i}{2}-1\right]$ in A;

2) la molteplicità *complessiva* $\left[\frac{r+s}{2}-2\right]$ in A, B (per modo che i rami lineari di curva per A, B, abbiano complessivamente riunite tante intersezioni colle C_{n-3});

3) la molteplicità complessiva $\left[\frac{r+s+t}{2}-3\right]$ in A, B, C ecc.

Di qui si ricava in particolare che, nelle ipotesi introdotte: ogni punto $2i^{\text{plo}}$ per C_{2n} ha sempre la molteplicità $i-1$ per le C_{n-3} e non maggiore; ogni punto $(2i+1)^{\text{plo}}$ di C_{2n} risulta $(i-1)^{\text{plo}}$ o i^{plo}, al più, per le C_{n-3}. Si ricava ancora che le singolarità più semplici della C_{2n}, abbassanti di 1 il genere (numerico) del piano doppio, sono: un punto 4^{plo}, o due punti 3^{pli} infinitamente vicini, ossia un punto $[3, 3]$.

Passando ora alla determinazione delle immagini delle curve bicanoniche sul piano doppio che ha come curva di diramazione C_{2n}, osserveremo che qui sono anzitutto da distinguere due casi, secondochè le dette immagini B sono curve doppie e quindi d' ordine doppio delle C_{n-3}, ossia d' ordine $2n-6$ $(B \equiv C_{2n-6})$, oppure curve semplici d' ordine $4n-12$ $(B \equiv C_{4n-12})$; nel 2° caso esse non formano più, generalmente, un sistema lineare.

Le condizioni di molteplicità delle immagini B delle curve bicanoniche, relative ai punti multipli di C_{2n}, discendono dal fatto che il sistema bicanonico è doppio del canonico; quindi un punto ordinario $2i^{\text{plo}}$ o $(2i+1)^{\text{plo}}$

di C_{2n} sarà $2(i-1)^{\text{plo}}$ per le $B \equiv C_{2n-6}$ (doppie), e $4(i-1)^{\text{plo}}$ per le $B \equiv C_{4n-12}$ (semplici). Ma occorrono speciali riguardi quando si hanno punti multipli infinitamente vicini. Così se la C_{2n} ha un punto $[3\,,3]$ (pel quale le immagini C_{n-3} delle curve canoniche debbono passare semplicemente) le $B \equiv C_{2n-6}$ dovranno *passare semplicemente per i due* punti tripli infinitamente vicini che lo compongono e le $B \equiv C_{4n-12}$ dovranno passarvi doppiamente ([1]). E per noi basta limitarci all' osservazione relativa a questo caso.

3. Veniamo ora alla determinazione dei piani doppi pei quali

$$p^{(1)} = 1 \qquad\qquad P > 1 .$$

Le superficie corrispondenti posseggono ∞^{P-1} curve bicanoniche di cui il genere vale $3p^{(1)} - 2 = 1$; queste curve costituenti un sistema lineare sono dunque composte colle curve ellittiche K di un fascio, giacchè l' esistenza di un sistema lineare ∞^2 di curve ellittiche irriducibili porterebbe l' annullarsi del genere e del bigenere della superficie, la quale anzi risulterebbe ([2]) razionale o riferibile ad una rigata ellittica.

Ora la superficie F che è immagine di un piano doppio di generi $p^{(1)} = 1$, $P > 1$, è trasformata in sè stessa da un' involuzione (razionale) I, la quale trasformerà in sè stessa ogni curva K del fascio nominato, o scambierà fra loro le curve K accoppiandole. In ogni caso le curve K avranno come corrispondenti, sul piano doppio, le curve L di un fascio, e le L saranno razionali (I) o ellittiche (II).

4. Poniamoci nel primo caso. Effettuando all' occorrenza una trasformazione birazionale del piano si può ([3]) supporre ridotto il fascio delle L ad un fascio di rette, avente un certo centro O. Allora la curva di diramazione C_{2n} del piano doppio avrà in O la molteplicità $2n-4$, o, in particolare, $2n-3$. Si può anche supporre la C_{2n} già ridotta (con trasformazioni quadratiche speciali aventi un punto fondamentale in O) ad avere soltanto punti multipli distinti da O, o punti multipli infinitamente vicini ad O che si succedono sopra rette per O. Infine si può supporre che la C_{2n} abbia l' ordine minimo tra quelle che si ottengono colle trasformazioni suindicate. È appena necessario avvertire che in C_{2n} debbono sempre essere comprese, *una volta*, quelle curve fondamentali (che nascono da punti del piano nelle trasformazioni precedenti) le quali verrebbero a figurare in essa un numero dispari di volte.

([1]) Cfr. Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, § 15.

([2]) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1894.

([3]) Nöther, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, III.

Date le ipotesi precedenti le singolarità di C_{2n} che possono influire abbassando il genere del piano doppio, sono soltanto (cfr. n. 2): se O è $(2n-4)^{plo}$ dei punti 4^{pli} o dei punti [3, 3] (coppie di punti tripli infinitamente vicini) se O è $(2n-3)^{plo}$ dei punti tripli infinitamente vicini ad O o dei punti [3, 3]; ciascuna di queste singolarità abbasserà di 1 il genere del piano doppio, poichè i gruppi di $n-3$ rette per O rappresentanti le curve canoniche, dovranno contenere come parte fissa la retta congiungente O con un siffatto punto singolare.

Ma, per la irriducibilità ad ordine minore della C_{2n}, dovranno essere osservate le seguenti condizioni:

a) Se la C_{2n} ha un punto 4^{plo} A distinto da O, essa non possiede, oltre A ed O, alcun punto singolare influente sul genere. Infatti un tal punto non potrebbe essere fuori di OA, e d'altra parte neppure su OA senza che questa retta si staccasse *due* volte da C_{2n} e dovesse quindi esser tolta dalla C_{2n} stessa.

b) Se la C_{2n} ha un punto 4^{plo} infinitamente vicino ad O, non può avere punti [3, 3] distinti da O.

c) La C_{2n} non può avere due punti 3^{pli} infinitamente vicini, distinti da O e non allineati con esso: se O è $(2n-3)^{plo}$ la C_{2n} non può avere neppure un punto [3, 3] infinitamente vicino ad O (due punti 3^{pli} consecutivi su una retta per O) giacchè la sua congiungente con O si staccherebbe due volte da C_{2n} e dovrebbe quindi essere soppressa.

Restano così i seguenti casi tipici:

1) C_{2n} con O $(2n-4)^{plo}$ o $(2n-3)^{plo}$, senza altri punti multipli o con un punto 4^{plo} A distinto da O.

Le curve canoniche sono date da tutti i gruppi di $n-3$ rette per O, o risp. dai gruppi di $n-4$ rette aumentati della parte fissa OA; quindi

$$p_g = p_n = n-2 \quad \text{o risp.} \quad p_g = p_n = n-3 .$$

In quanto alle curve bicanoniche, esse sono composte colle curve ellittiche K rappresentate doppiamente sopra le rette per A; esse vengono date dunque dai gruppi di $2(n-3)$ rette per O di cui fa parte, eventualmente, la OA contata due volte, perciò

$$P = 2n-5 \quad \text{o} \quad P = 2n-6 .$$

2) C_{2n} con O $(2n-4)^{plo}$, r punti 4^{pli} infinitamente vicini ad O, h punti [3, 3] infinitamente vicini ad O (su altrettante rette per O che si distaccano da C_{2n}), dove

$$4r + 3h \leq 2n-4 .$$

Le rette per O contenenti i punti 4^{pli} si staccano una volta da tutti i gruppi canonici C_{n-3} di $n-3$ rette per O e due volte dai gruppi bicanonici di $2(n-3)$ rette; le rette per O contenenti i punti $[3,3]$ si staccano pure una volta dai gruppi C_{n-3} ma pure una volta sola dai gruppi bicanonici; per conseguenza si trova

$$p_g = p_n = n - 2 - h - r \qquad P = 2n - 5 - h - 2r.$$

3) C_{2n} con O $(2n-4)^{plo}$ ed h punti $[3,3]$ su rette per O che si distaccano dalla C_{2n}. In questo caso si trova (come precedentemente)

$$p_n = n - 2 - h \qquad P = 2n - 5 - h \qquad p_g = p_n \text{ o } p_g = 0$$

se il p_n risulta negativo.

4) C_{2n} con O $(2n-3)^{plo}$ ed r punti 3^{pli} infinitamente vicini ad O. Questo è un caso particolare del caso 2); ancora

$$p_g = p_n = n - 2 - r \qquad P = 2n - 5 - 2r.$$

Matematica. — *Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili.* Nota di G. Vivanti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Si dice che una funzione $f(x,y)$ di due variabili x,y ha un massimo o un minimo in un punto $O(a,b)$, se può assegnarsi un intorno di questo punto, in tutti i punti del quale la funzione abbia valore minore, o rispettivamente maggiore, di $f(a,b)$.

Può avvenire, come si sa, che su ogni retta uscente dal punto O possa assegnarsi un tratto finito in tutti i punti del quale la funzione sia, p. es., maggiore di $f(a,b)$, senza che essa abbia in O un minimo; cioè la funzione può avere un minimo nel punto O rispetto a qualunque retta passante per esso senza avere in quel punto un minimo.

Ci proponiamo di dimostrare, che la stessa cosa non può aver luogo quando, anzichè tutte le *rette*, si considerano tutte le *linee* uscenti dal punto O.

Qui occorre precisare alcuni concetti.

Diremo che una linea è *continua*, se essa possiede le due seguenti proprietà:

a) Dati due punti qualunque della linea, e data una quantità arbitraria σ, può iscriversi nella linea una spezzata avente gli estremi in quei due punti, e i cui lati sieno tutti minori di σ;

b) Ogni punto-limite d'un insieme di punti posti sulla linea appartiene alla linea (1).

(1) Questa definizione di *continuo lineare* è la stessa che fu data da G. Cantor (Math. Ann., t. XXI, e Acta math., t. II) pel continuo ad un numero qualunque di dimensioni.