ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Le osservazioni sono fatte all' equatoriale di 0^m25 col micrometro filare.

L' astro nei primi dì della scoperta era lucente, con nucleo di 7^{ma} e piccola coda; attualmente, allontanandosi sì dalla terra che dal sole, va perdendo rapidamente nello splendore. Elementi parabolici sono per ora bastevoli a rappresentare il suo movimento apparente nel cielo; l' astro fu al perielio il 17 marzo e la distanza perielia fu 1,1.

Matematica. — *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)}=1$. Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona (1).

5. Discutiamo ora il caso II in cui le immagini L delle parti variabili irriducibili delle curve bicanoniche, sul piano doppio, sono curve ellittiche, costituenti un fascio. Seguendo il sig. Bertini, questo fascio può essere ricondotto birazionalmente ad un fascio di curve C_{3s} (d' ordine $3s$) con 9 punti s^{pli} (fascio di Halphen). Indichiamo con C_{2n+6} la curva di diramazione del piano doppio così trasformato e con $x_1, x_2 \dots x_9$ le sue molteplicità nei 9 punti base delle C_{3s}.

Le curve canoniche (unitamente a qualche curva eccezionale) verranno rappresentate da curve C_n passanti pei detti 9 punti con certe molteplicità $h_1, h_2 \dots h_9$, dove

$$x_i = 2h_i + \varrho_i$$

essendo $\varrho_i \leq 2$.

Ora poichè le C_{3s} rappresentano, sulla superficie, delle curve ellittiche K componenti un fascio, privo di punti base, esse non vengono incontrate dalle C_n nè dalla C_{2n+6}, sicchè

$$3ns - \sum h_i s = 0\,,$$
$$(2n+6) \,.\, 3s - \sum (2h_i + \varrho_i) \,.\, s = 0\,,$$

ossia

$$3n - \sum h_i = 0$$
$$6n + 18 - 2\sum h_i - \sum \varrho_i = 0\,,$$

da cui

$$\sum \varrho_i = 18 \qquad \varrho_i = 2 \qquad x_i = 2h_i + 2\,.$$

Calcoliamo ora il genere lineare $p^{(1)}$ del piano doppio che deve essere uguale ad 1, tenendo conto del numero virtuale delle intersezioni di due curve canoniche, il quale vale $p^{(1)} - 1$.

Se nella C_n non entrano parti eccezionali, si ottiene

$$n^2 - \sum h_i^2 = p^{(1)} - 1 = 0\,.$$

(1) V. pag. 234.

Ma se nella C_n entra una C_δ composta di curve eccezionali, e passante pei nominati punti h_i pli di C_n colle molteplicità y_i ($\leq h_i$), si avrà

$$p^{(1)} - 1 = (n-\delta)^2 - \sum (h_i - y_i)^2 = 0 .$$

D'altra parte, considerando le intersezioni di $C_{n-\delta}$, C_δ, si dedurrà

$$\sum h_i\, y_i \leq \delta(n-\delta) .$$

Si ricava

$$n^2 - \sum h_i^2 - \delta^2 - \sum y_i^2 \geq 0$$
$$n^2 - \sum h_i^2 > 0 .$$

In ogni caso sussiste dunque la disuguaglianza

$$n^2 - \sum_1^9 h_i^2 \geq 0 .$$

Ora, tenendo conto dell'eguaglianza

$$3n - \sum_1^9 h_i = 0 ,$$

si può concludere

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_9 = \frac{n}{3} .$$

Infatti n^2 rappresenta il minimo valore della somma dei quadrati di 9 numeri h_i, tali che $\sum_1^9 h_i = 3n$, onde per altri valori dati ai numeri h_i riuscirebbe $n^2 - \sum h_i^2 < 0$.

Segue in particolare che n è divisibile per 3 $(2n + 6 = 6m)$, e $\delta = 0$, ossia non vi sono, sul piano doppio, curve eccezionali.

Ora poichè la $C_{2n+6} = C_{6m}$ deve avere le molteplicità $\frac{n}{3}$ nei 9 punti base s^{pli} per le C_{3s}, essa dovrà comporsi di un certo numero r di C_{3s}, ed eventualmente anche (per s dispari > 1) della cubica C_3 che passa i 9 punti nominati:

$$C_{6m} = r\, C_{3s} \qquad (6m = 3rs)$$

oppure

$$C_{6m} = r\, C_{3s} + C_3 \text{ [1]} \qquad (6m = 3rs + 3).$$

Allora le immagini delle curve canoniche sul piano doppio saranno curve $C_{3n} = C_{3m-3}$ composte colle C_{3s} e colle C_3,

$$C_{3m-3} = x\, C_{3s} + y\, C_3 .$$

[1] Questo resultato non è a priori evidente come si potrebbe credere pel fatto che le C_{3s} debbono rappresentare curve ellittiche. Nella C_{2n+6} potrebbero invero entrare come parti delle componenti della C_3 supposta spezzata.

L' equazione d' analisi indeterminata

$$3m - 3 = 3sx + 3y,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore di x che è

$$x = \left[\frac{m-1}{s}\right],$$

ossia rispettivamente

$$x = \left[\frac{rs-2}{2s}\right] \quad \text{o} \quad x = \left[\frac{rs-1}{2s}\right].$$

Sarà quindi

$$p_g = x + 1.$$

Tuttavia il numero virtuale delle C_{3m-3} è sempre 1, così il genere numerico del piano doppio vale in tutti i casi $p_n = 1$.

In quanto alla determinazione delle curve bicanoniche, e quindi del bigenere, del piano doppio, osserviamo che la C_{6m} di diramazione unita ad una C_{3m-6} aggiunta alle C_{3m-3} immagini delle curve canoniche, rappresenta appunto una curva bicanonica. Questa osservazione si può stabilire, sia come corollario di una proposizione generale che si dimostra appoggiandosi alle proprietà fondamentali delle curve canoniche e bicanoniche, sia direttamente per questo caso, giacchè, indicata con $f(xy) = 0$ l' equazione della C_{6m}, si può verificare che il piano $z = 0$ fa parte di una superficie d' ordine $2(6m - 4)$ biaggiunta rispetto alla

$$z^2 = f(xy).$$

Dalla osservazione precedente si ricava che le curve bicanoniche non sono rappresentate doppiamente, ma solo semplicemente sul nostro piano doppio; l' ordine delle immagini ($C_{12(m-1)}$) delle curve bicanoniche sarà dunque $4(3m - 3)$, essendo $3m - 3$ l' ordine delle immagini (doppie) delle curve canoniche, e similmente la molteplicità delle $C_{12(m-1)}$, in ogni punto $2m^{\text{plo}}$ di C_{6m}, sarà $4(m - 1)$. Da ciò si deduce che le $C_{12(m-1)}$ debbono resultare composte colle C_{3s} ed eventualmente anche (per $s > 1$) colle C_3:

$$C_{12(m-1)} = u\,C_{3s} + v\,C_3.$$

L' equazione d' analisi indeterminata in u, v,

$$12(m-1) = 3su + 3v,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore intero di u, che è

$$u = \left[\frac{4(m-1)}{s}\right],$$

ossia rispettivamente

$$u = \left[\frac{2rs-4}{s}\right] \quad \text{o} \quad u = \left[\frac{2rs-3}{s}\right].$$

Ma, in generale, non tutte le $C_{12(m-1)}$ così composte, saranno immagini di curve bicanoniche del piano doppio, e quindi il bigenere P potrà resultare inferiore ad $u+1$.

Si osservi infatti, che ogni C_{3s} (entrando come parte variabile nell'immagine di qualche curva bicanonica) rappresenta *due* curve ellittiche K sopra la superficie riferita al piano doppio. Ora le K formano su questa superficie un fascio, avente un certo genere π, e le parti variabili delle curve bicanoniche costituiscono i gruppi di una serie lineare completa g_u^{P-1} nell'ente ∞' (fascio) che ha per elementi le K, onde se $\pi > 0$

$$P - 1 < u.$$

Il genere π del fascio si può valutare tenendo conto del numero r delle C_{3s} che entrano a comporre la C_{6m}. Invero l'ente fascio contiene una g'_2 costituita dalle coppie di K rappresentate sopra una stessa C_{3s}; gli elementi di coincidenza della g'_2 sono costituiti dalle C_{3s} che fanno parte di C_{6m} ed eventualmente anche (per $s > 1$) dalla cubica C_3 che passa pei 9 punti base delle C_{3s}; si avrà dunque

$$2 + 2\pi = r \quad \text{o} \quad 2 + 2\pi = r + 1,$$

secondo la parità o disparità di r, cioè

$$\pi = \left[\frac{r-1}{2}\right].$$

Ma poichè, in tutti i casi,

$$u \geq 2 + 2\pi \qquad (\text{essendo } 3rs \geq 12),$$

la serie g_u^{P-1} è non speciale, sicchè

$$P - 1 = u - \pi.$$

Si deduce rispettivamente

$$P = \left[\frac{2rs-4}{s}\right] - \left[\frac{r-3}{2}\right] \quad \text{o} \quad P = \left[\frac{2rs-3}{s}\right] - \left[\frac{r-3}{2}\right].$$

Si presentano dunque i seguenti casi:

1) La C_{6m} è composta di $r = 2m$ cubiche d'un fascio ($s = 1$, $r = 2m$)

$$p_g = m = \left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P = 3m - 2 = \frac{3r-4}{2}.$$

2) La C_{6m} è composta di $r=m$ sestiche C_6 aventi 9 punti doppi comuni

$$p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P=\left[\frac{3r}{2}\right].$$

3) La C_{6m} è composta di $r\,C_9$ con 9 punti 3^{pli} comuni, ed eventualmente anche (per r dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P=\left[\frac{3r+1}{2}\right].$$

4) La C_{6m} è composta di $r\,C_{3s}$ $(s>3)$ con 9 punti s^{pli} comuni, ed eventualmente anche (per r ed s dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g=\left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P=\left[\frac{3r+2}{2}\right].$$

Matematica. — *Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* (1). Nota del dott. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

1. Diremo che due forme lineari alle differenze $A(y)$, $B(y)$, sono *equivalenti* quando ammettono uno stesso sistema fondamentale di integrali: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Se, per maggior generalità, ammettiamo che nelle forme che fanno oggetto del nostro studio possano insieme comparire le potenze positive e le negative del simbolo operativo θ, e se θ^{-r} e θ^{-s} sono le massime potenze negative che si hanno nelle espressioni di $A(y)$, $B(y)$, dovremo avere:

$$(1)\; A(y)=c_1\begin{vmatrix} \theta^{-r}y & ,\theta^{-r}y_1 & ,\dots, & \theta^{-r}y_n \\ \theta^{-r+1}y & ,\theta^{-r+1}y_1 & ,\dots, & \theta^{-r+1}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & ,y_1 & ,\dots, & y_n \\ \theta y & ,\theta y_1 & ,\dots, & \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-r}y & ,\theta^{n-r}y_1 & ,\dots, & \theta^{n-r} \end{vmatrix},\quad B(y)=c_2\begin{vmatrix} \theta^{-s}y & ,\theta^{-s}y_1 & ,\dots, & \theta^{-s}y_n \\ \theta^{-r+1}y & ,\theta^{-s+1}y_1 & ,\dots, & \theta^{-s+1}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & ,y_1 & ,\dots, & y_n \\ \theta y & ,\theta y_1 & ,\dots, & \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-s}y & ,\theta^{n-s}y_1 & ,\dots, & \theta^{n-s}y_n \end{vmatrix}$$

con c_1 e c_2 costanti per la operazione θ.

(1) Questa Nota fa seguito ad un'altra pubblicata nel vol. V, 1° sem. 1896, serie 5ª, di questi Rendiconti col titolo: *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze.*