ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

2) La C_{6m} è composta di $r = m$ sestiche C_6 aventi 9 punti doppi comuni

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P = \left[\frac{3r}{2}\right].$$

3) La C_{6m} è composta di $r\, C_9$ con 9 punti 3^{pli} comuni, ed eventualmente anche (per r dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P = \left[\frac{3r+1}{2}\right].$$

4) La C_{6m} è composta di $r\, C_{3s}$ $(s > 3)$ con 9 punti s^{pli} comuni, ed eventualmente anche (per r ed s dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right] \qquad P = \left[\frac{3r+2}{2}\right].$$

Matematica. — *Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* [1]. Nota del dott. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. Diremo che due forme lineari alle differenze $A(y)$, $B(y)$, sono *equivalenti* quando ammettono uno stesso sistema fondamentale di integrali: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Se, per maggior generalità, ammettiamo che nelle forme che fanno oggetto del nostro studio possano insieme comparire le potenze positive e le negative del simbolo operativo θ, e se θ^{-r} e θ^{-s} sono le massime potenze negative che si hanno nelle espressioni di $A(y)$, $B(y)$, dovremo avere:

$$(1)\ A(y) = c_1 \begin{vmatrix} \theta^{-r}y & , \theta^{-r}y_1 & , \dots , \theta^{-r}y_n \\ \theta^{-r+1}y & , \theta^{-r+1}y_1 & , \dots , \theta^{-r+1}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y & , y_1 & , \dots , y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \dots , \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-r}y & , \theta^{n-r}y_1 & , \dots , \theta^{n-r} \end{vmatrix}, \quad B(y) = c_2 \begin{vmatrix} \theta^{-s}y & , \theta^{-s}y_1 & , \dots , \theta^{-s}y_n \\ \theta^{-r+1}y & , \theta^{-s+1}y_1 & , \dots , \theta^{-s+1}y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y & , y_1 & , \dots , y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \dots , \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-s}y & , \theta^{n-s}y_1 & , \dots , \theta^{n-s}y_n \end{vmatrix}$$

con c_1 e c_2 costanti per la operazione θ.

[1] Questa Nota fa seguito ad un'altra pubblicata nel vol. V, 1° sem. 1896, serie 5ª, di questi Rendiconti col titolo: *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze.*

Se ne ricava:

$$(2)\qquad \frac{1}{c_1}\,\theta^r A(y) = \frac{1}{c_2}\,\theta^s B(y) = \begin{vmatrix} y\ , & y_1\ , & \dots\ , & y_n \\ \theta y\ , & \theta y_1\ , & \dots\ , & \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^n y\ , & \theta^n y_1\ , & \dots\ , & \theta^n y_n \end{vmatrix}$$

D' onde si conclude:

Se $A(y)$ *e* $B(y)$ *sono forme equivalenti, e sono s ed r le massime potenze negative di* θ *che si trovano nelle espressioni di* $A(y)$ *e* $B(y)$, *si dovrà avere identicamente:*

$$(3)\qquad \theta^s A(y) = k\,\theta^r B(y)\,,$$

con k *costante per la operazione* θ.

2. Si noti a questo proposito che le forme $A(y)$, $\theta^r A(y)$ sono equivalenti al senso superiormente detto, ma non sono, in generale, identiche, e che le loro aggiunte rispettive $\overline{A(y)}$, $\overline{A}\theta^{-r}(y)$ non sono equivalenti fra di loro a meno che le operazioni $\overline{A}$ e θ^{-r} non sieno commutabili.

Per questa ragione, la proprietà della forma

$$A = G\,.\,\overline{G}\,,$$

prodotto di due aggiunte l' una dell' altra, di coincidere con la sua aggiunta [1], non appartiene nè alle forme $\theta^r A$, nè in generale alle altre forme equivalenti alla A.

Vogliamo qui invece studiare la natura dei legami che si debbono imporre agli integrali dei sistemi fondamentali di una forma, perchè questa sia equivalente alla sua aggiunta, per modo che, una tale proprietà, dovrà esser comune anche a tutte le altre forme equivalenti alla data.

3. Dalla definizione data di equivalenza e da quanto è stato dimostrato dal prof. Pincherle nella sua *Algebra delle forme lineari alle differenze* [2] ai § 11 e 12, ne viene che:

Due forme lineari alle differenze sono equivalenti quando ammettono una stessa scomposizione in fattori del primo ordine.

Se ne deduce poi, con facile ragionamento, che:

Se due forme $A(y)$, $B(y)$, *sono equivalenti, e sono rappresentabili come prodotti di due fattori* $A_1A_2(y)$, $B_1B_2(y)$, *dei quali i due primi* $A_1(y)$, $B_1(y)$, *sono fra loro equivalenti, lo saranno anche gli altri due, e reciprocamente.*

[1] Cfr. il n. 2, e) della nota citata: *La forma aggiunta* ecc. Vedi anche il teor. IV dato dal prof. Pincherle nella nota: *Sull'operazione aggiunta*, letta alla Acc. di Bologna il 17 aprile 1898.

[2] Memorie dell'Acc. delle Sc. di Bologna, a. 1895.

Ed in conseguenza di ciò si conclude che

Se i prodotti $A_1A_2A_3(y)$, $B_1B_2B_3(y)$, *sono equivalenti, e sono equivalenti, ciascuno a ciascuno, i fattori* $A_1(y)$, $A_3(y)$, *del primo, ai fattori* $B_1(y)$, $B_3(y)$ *dell'altro, anche i rimanenti fattori* $A_2(y)$, $B_2(y)$, *sono fra loro equivalenti.*

4. Sieno ora le due forme aggiunte:

$$(4)\qquad \begin{cases} A(y) = a_0 y + a_1\theta y + \cdots + a_n\theta^n y \\ \overline{A}(y) = a_0 y + \theta^{-1}a_1 \,.\, \theta^{-1} y + \cdots + \theta^{-n}a_n \,.\, \theta^{-n} y \,. \end{cases}$$

Se vogliamo che queste forme sieno equivalenti, dovremo, in forza della formula (3), avere la identità:

$$A(y) = k \,.\, \theta^n \overline{A}(y)\,,$$

e cioè:

$$(5)\qquad a_0 y + a_1\theta y + \cdots + a_n\theta^n y = k(a_n y + \theta a_{n-1} \,.\, \theta y + \cdots + \theta^n a_0 \,.\, \theta^n y).$$

Da cui le formule:

$$(6)\qquad \begin{cases} a_r = k\,\theta^r a_{n-r} \\ (r = 0\,,1\,,\ldots n)\,. \end{cases}$$

5. Nel caso di n pari ed eguale a $2m$, pel coefficiente del termine medio si ha la relazione:

$$(7)\qquad a_m = k\,\theta^m a_m\,,$$

e scrivendo:

$$(8)\qquad a_m = 2a'_m$$

si ha ancora

$$(9)\qquad a'_m = k\theta^m a'_m$$

ed allora, per le relazioni (6) e (9), potremo scrivere:

$$A(y) = a_0 y + a_1\theta y + \cdots + a'_m\,\theta^m y + k\theta^m(a'_m y + \theta a_{m-1} \,.\, \theta y + \cdots \theta^m a_0\,\theta^m y)\,.$$

E ponendo:

$$(10)\qquad G(y) = a_0 y + a_1\theta y + \cdots + a'_m\,\theta^m y$$

avremo

$$A(y) = G(y) + k\theta^m \,.\, \theta^m \,.\, \overline{G}(y)$$

cioè:

$$(11)\qquad A(y) = G(y) + k\,\theta^n \overline{G}(y)\,.$$

Se nel caso di n dispari ed eguale a $2m+1$ poniamo similmente:

$$(12)\qquad G(y) = a_0 y + a_1\theta y + \cdots + a_m\theta^m y\,,$$

avremo:

$$A(y) = G(y) + k\theta^{m+1}\theta^m\,\overline{G}(y)$$

e cioè anche in questo caso:

$$\text{(11)} \qquad A(y) = G(y) + k\theta^n \overline{G}(y) .$$

Si conclude dunque:

Una forma lineare alle differenze dell'ordine n equivalente alla sua aggiunta si può sempre rappresentare come somma di due forme di cui l'una è equivalente al prodotto della aggiunta dell'altra per la operazione θ^n.

6. Dalle formule (6) si ricava, con facile sostituzione:

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} a_r = k^2\theta^n a_r , \quad \theta^n a_r = \dfrac{1}{k^2}\, a_r \\ (r = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

Da cui: *In una forma equivalente alla sua aggiunta, i coefficienti sono funzioni che per effetto della operazione θ^n acquistano il fattore costante $\frac{1}{k^2}$.*

Sia ora y_1 un integrale di una tale forma; avremo identicamente:

$$\sum_{r=0}^{n} a_r\, \theta^r y_1 = 0$$

ed applicando la operazione θ^n, tenendo poi conto delle relazioni (13), avremo anche

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \,.\, \theta^{n+r} y_1 = 0 ,$$

e cioè

$$\sum_{r=0}^{n} a_r\, \theta^r(\theta^n y_1) = 0 .$$

Da cui:

Se y_1 è integrale di una forma lineare alle differenze di ordine n equivalente alla sua aggiunta, anche $\theta^n y_1$ è integrale di quella forma.

7. Dalla relazione

$$\text{(14)} \quad A(y) = a_0 y + a_1\theta y + \cdots + a_n\theta^n y = c \begin{vmatrix} y , \theta y , \dots , \theta^{n-1} y , \theta^n y \\ y_1 , \theta y_1 , \dots , \theta^{n-1} y_1 , \theta^n y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n , \theta y_n , \dots , \theta^{n-1} y_n , \theta^n y_n \end{vmatrix}$$

si ricava:

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} a_0 = c\,|\theta^{r+1} y_s| \\ a_n = (-1)^n\, c\,|\theta^r y_s| \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \dots, n-1 \\ s = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix} .$$

Da cui:

(16) $$a_0 = (-1)^n \, \theta a^n .$$

E per le (6), avremo:

(17) $$\theta a_n = (-1)^n \, k a_n , \quad \theta a_0 = (-1)^n \, k \, . \, a_0$$

d'onde:

$$\theta^n a_n = (-1)^n \, k^n a_n .$$

Ma, per le (13), si ha:

$$\theta^n a_n = \frac{1}{k^2} \, a_n ,$$

avremo dunque:

(18) $$\frac{1}{k^2} = (-1)^n \, k^n , \text{ ossia } k^{n+2} = (-1)^n .$$

Il fattore costante k *per cui possono differire le due forme* $\mathrm{A}(y)$ *e* $\theta^n \overline{\mathrm{A}}(y)$ *nel caso che esse sieno equivalenti fra di loro, deve dunque essere radice della equazione binomia*

(19) $$x^{n+2} - (-1)^n = 0 .$$

8. Al n. 5 del precedente lavoro sulle forme aggiunte, ho dimostrato che:

Se $y_1 , y_2 , \dots , y_n$, $z_1 , z_2 , \dots , z_n$, sono sistemi fondamentali aggiunti [1] di due forme aggiunte, considerando le due matrici:

(20) $$\begin{cases} y_1 \quad , y_2 \quad , \dots , y_n & \theta^{-(n-1)} z_1 , \theta^{-(n-1)} z_2 , \dots , \theta^{-(n-1)} z_n \\ \theta y_1 \quad , \theta y_2 \quad , \dots , \theta y_n & \theta^{-(n-2)} z_1 , \theta^{-(n-1)} z_2 , \dots , \theta^{-(n-2)} z_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \theta^{n-1} y_1 , \theta^{n-1} y_2 , \dots , \theta^{n-1} y_n & z_1 \quad , z_2 \quad , \dots , z_n \end{cases} ,$$

i minori formati con le prime p linee della prima sono eguali ai complementari dei minori corrispondenti nella seconda moltiplicati pel fattore costante:

$$\begin{cases} (-1)^{\frac{(n-p+1)(n-p)}{2}} \, | \theta^r y_s | \\ \begin{pmatrix} r = 0 , 1 , \dots , n-1 \\ s = 1 , 2 , \dots , n \end{pmatrix} . \end{cases}$$

Se ora, come sistema $z_1 , z_2 , \dots z_n$, possiamo scegliere il sistema $\theta^n y_1 , \theta^n y_2 , \dots \theta^n y_n$, avremo le formule:

(21) $$\sum \pm y_1 \, . \, \theta y_2 \dots \theta^{p-2} y_{p-1} =$$
$$\theta \sum \pm \theta^{p-1} y_p \, . \, \theta^p y_{p+1} \dots \theta^{n-1} y^p \, . \, (-1)^{\frac{(n-p-1)(n-p)}{2}} \sum \pm y_1 \, . \, \theta y_2 \dots \theta^{n-1} y_n .$$

[1] Cfr. il n. 5 della nota citata *La forma aggiunta* ecc.

Cioè: *I minori formati con le prime p linee della matrice*:

$$\begin{array}{llll} y_1 & , y_2 & , \ldots , & y_n \\ \theta y_2 & , \theta y_2 & , \ldots , & \theta y_n \\ . & . & . & . \\ \theta^{n-1} y_1 & , \theta^{n-1} y_2 & , \ldots , & \theta^{n-1} y_n , \end{array}$$

sono proporzionali al prodotto dei loro complementari per la operazione θ.

Continuando ad usare la notazione:

$$V_m = | \theta^r y_s | \quad \begin{pmatrix} r = 0 , 1 \ldots m - 1 \\ s = 1 , 2 \ldots , m \end{pmatrix}$$

introdotta nella nota precedente, rappresentando con $V_{r,s}$ i minori formati con le prime p linee, e con $\mathrm{D}_{r,s}$ i loro complementari, avremo

$$\sum\nolimits_{r,s} V_{r,s} \,.\, \mathrm{D}_{r,s} = V_n \tag{22}$$

ma poichè

$$\theta\, \mathrm{D}_{r,s} = \frac{V_{r,s}}{V_n}$$

ossia

$$\mathrm{D}_{r,s} = \frac{\theta^{-1} V_{r,s}}{\theta^{-1} V_n},$$

dovremo avere:

$$\sum\nolimits_{r,s} V_{r,s} \,.\, \theta^{-1} V_{r,s} = (-1)^{\frac{(n-p-1)(n-p)}{2}} V_n \,.\, \theta^{-1} V_n . \tag{23}$$

In particolare, per $p = 1$ si ha:

$$\sum_{r=1}^{n} y_r \,.\, \theta^{-1} y_r = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} V_n \,.\, \theta^{-1} V_n . \tag{24}$$

9. Se indichiamo ancora con $y_1 , y_2 \ldots y_n$ un sistema fondamentale della $\mathrm{A}(y)$, e con $z_1 , z_2 , \ldots , z_n$ il suo sistema aggiunto, per la equivalenza delle due forme $\mathrm{A}(y) , \bar{\mathrm{A}}(y)$, occorre che le $\theta^n y_1 , \theta^n y_2 \ldots \theta^n y_n$, si possano ottenere delle $z_1 , z_2 , \ldots z_n$, con una sostituzione lineare a coefficienti costanti ed a determinante diverso da zero.

I due determinanti $\theta V (y_1 , y_2 \ldots y_n)$ e $V_{-1} (z_1 , z_2 \ldots z_n)$ non potranno perciò differire che per un fattore costante h.

Tenuto conto di questo, dalle formule (21), per $p = 0$, si ricava:

$$V_n \,.\, \theta V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} h, \tag{25}$$

e, per le (15),

$$(-1)^n \frac{a_n}{c} \cdot (-1)^n \frac{\theta a_n}{c} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} h,$$

cioè

$$a_n \theta a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot c^2 h. \tag{26}$$

D'altra parte, per le (14), si ha:

$$a_n \theta a_n = (-1)^n k a_n^2,$$

dunque

$$(-1)^n k a_n^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c^2 h,$$

ed infine

$$a_n^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{c^2 h}{k}. \tag{27}$$

Poichè c, k ed h sono costanti per la operazione θ, tale sarà anche a_n^2 e si avrà:

$$\theta a_n^2 = a_n^2, \tag{28}$$

e per essere la operazione θ distributiva anche per la moltiplicazione:

$$(\theta a_n)^2 = a_n^2,$$

ed infine

$$\theta a_n = \pm a_n. \tag{29}$$

Cioè *il coefficiente a_n è alternante per le operazioni del gruppo formato dalla θ e dalle sue potenze.*

Si ha però, dalle (17):

$$\theta a_n = (-1)^n k a_n;$$

dunque si conclude:

$$k = \pm 1. \tag{30}$$

Siccome poi deve aversi

$$k^{n+2} = (-1)^n,$$

si conclude che, *per n dispari deve essere* $k = -1$, e rimane indeterminato il segno di k per n pari.

10. Dalle formule (13), per la determinazione fatta di k^2, si ricava:

$$a_r = \theta^n a_r \quad (r = 1, \dots, n) \tag{31}$$

e cioè: *In una forma lineare alle differenze equivalente alla sua aggiunta* *tutti i coefficienti sono costanti per la operazione* θ^n; cioè sono funzioni periodiche della variabile x ed hanno tutte il medesimo periodo n. *Le forme alle differenze equivalenti alla loro aggiunta, sono dunque forme periodiche, ed i loro integrali sono anche integrali di forme a coefficienti costanti e di ordine* n^2 (1). Di qui, per la formula (14), si deduce ancora che: *Se* $y_1, y_2, \dots y_n$, *è un sistema fondamentale comune ad una forma alle differenze ed alla sua aggiunta, tutti i determinanti di ordine* n *contenuti nella matrice*:

$$\begin{matrix} y_1, \theta y_1, \dots, \theta^n y_1 \\ y_2, \theta y_2, \dots, \theta^n y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, \theta y_n, \dots, \theta^n y_n \end{matrix}$$

sono invarianti per la operazione θ^n.

Si consideri poi che dalla eguaglianza $V_n = (-1)^n \frac{a_n}{c}$ *si deduce che il determinante*

$$V_n = |\theta^r y_s| \quad \begin{pmatrix} r = 0, 1 \dots n-1 \\ s = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

è invariante per la operazione θ, *tanto nel caso di* n *dispari quanto nel caso in cui* n *sia pari e sia* $k = 1$. *È alternante solo nel caso che sia* n *pari e* $k = -1$.

Nei primi due casi si ha, dalle formole (25):

(33) $$V_n^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ossia:

$$V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

e nell'ultimo caso si ha:

(34) $$V_n^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)+2}{2}}$$
$$V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)+2}{4}}.$$

Sostituendo questi valori nelle formule (23) si hanno le relazioni

$$\sum_{r,s} V_{r,s}\, \theta V_{r,s} = \pm 1$$

ed in particolare:

(35) $$\sum_{r=1}^{n} y_r\, \theta y_r = (-1)^{n-1}.$$

(1) Cfr. *Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*. Annali di Matematica, 1895.

11. Nel caso di n dispari, dalle formule (5), (6), (17), si ricavano le altre:

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{c} A(y) = -\,\theta^n\overline{A}(y) \\ \theta a_n = a_n\,, \quad \theta a_0 = a_0 \\ a_0 = -\,a_n \\ a_r = -\,\theta^r a_{n-r} \quad (r = 1\,, 2\,, \ldots n-1) \\ A(y) = G(y) - \theta^n\overline{G}(y)\,. \end{array}\right.$$

Da cui in particolare si deduce che *una forma lineare alle differenze di grado dispari equivalente alla sua aggiunta è identica al prodotto di questa per la operazione* θ^n *cambiato di segno, e che i coefficienti del primo e dell'ultimo termine sono invarianti per la operazione* θ, *e sono fra di loro eguali ma contrari di segno.*

12. Nel caso di n pari si hanno i due sistemi di formule:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{cc} A(y) = \theta^n\overline{A}(y) & A(y) = -\,\theta^n\overline{A}(y) \\ \theta a_n = a_n\,, \quad \theta a_0 = a_0 & \theta a_n = -\,a_n \quad \theta a_0 = -\,a_0 \\ a_0 = a_n & a_0 = -\,a_n \\ a_r = \theta^r a_{n-r} \quad (r = 1\,, 2 \ldots n-1) & a_r = -\,\theta^r a_{n-r} \quad (r = 1\,, 2 \ldots n-1) \\ A(y) = G(y) + \theta^n\overline{G}(y) & A(y) = G(y) - \theta^n\overline{G}(y) \end{array}\right.$$

delle quali, se nella forma data si suppone costante il coefficiente dell'ultimo termine (d'ordinario si suppone $a_n = 1$), solo il sistema di sinistra dovrà ritenersi valido e si concluderà che: *Le forme di grado pari equivalenti alle loro aggiunte, sono direttamente eguali al prodotto di queste per la operazione* θ^n *ed in esse sono direttamente eguali fra di loro i coefficienti del primo e dell'ultimo termine.*

Fisica terrestre. — *Il terremoto dell'India del 12 giugno 1897 registrato in Europa.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Circa $^1/_4$ d'ora dopo il mezzogiorno del 12 giugno, cominciarono ad essere perturbati gli strumenti di gran numero d'Osservatorî italiani, e la perturbazione raggiunse in breve proporzioni veramente straordinarie e non cessò che lungo tempo appresso. Perturbazioni analoghe avvennero nella maggior parte dei magnetografi ed in altri delicati strumenti disseminati qua e là in Europa.

Il fatto che il movimento passò inavvertito alle persone, ed il genere stesso della registrazione da parte degli strumenti stavano a provare che doveva trattarsi d'un terremoto disastroso avvenuto in lontane contrade. Il giorno