ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Matematica. — *Sulla classificazione delle congruenze.* Nota di Giovanni Bordiga, presentata dal Socio Cremona.

I sistemi ∞^{n-1} di raggi di uno spazio fondamentale S_n godono della importante proprietà, dovuta a Segre ([1]), che le rette del sistema sono — in generale — tangenti $n-1$ volte ad una varietà focale M_{n-1}. Il numero delle caratteristiche, cioè delle singolarità ordinarie che servono a classificare il sistema, dipende dal numero n.

Per $n=2$ questo numero è 3, e le caratteristiche sono 6; ma il problema di determinare i limiti che i valori di tutte le caratteristiche possono assumere e quello di verificare se ad ogni gruppo di caratteristiche corrisponda un determinato sistema, non furono ancora risolti per alcuno spazio ([2]).

Per $n=3$ il dott. R. Schumacher ([3]) ha stabilito la classificazione delle congruenze algebriche mediante quattro caratteristiche, cioè: l'*ordine* (numero di raggi che passano per un punto), la *classe* (numero di raggi situati in un piano), la *specie* o *rango* (numero delle coppie di raggi che appartengono ad un fascio piano con una retta arbitraria dello spazio) e un numero t che risulta dalla considerazione di quelle terne di raggi che escono da un punto e sono situati in un piano. (Il numero t esprime quante terne possiede la congruenza i cui centri sono su di un piano, e i cui piani passano per un medesimo punto).

Il dott. Schumacher fondò le sue ricerche nella rappresentazione dello spazio rigato, che contiene la congruenza, sovra uno spazio lineare a 4 dimensioni.

In questa Nota i risultati principali del dott. Schumacher sono ottenuti assai più brevemente dalla geometria sulle curve algebriche; alcuni di essi possono estendersi senza difficoltà al caso generale di S_n.

1. Sia [C] la congruenza dello spazio ordinario di ordine n e classe m. Una retta arbitraria a è, come si sa, direttrice n^{pla} di una rigata F situata su [C] che è dell'ordine $n+m$. Sia p il genere di una sua sezione γ^{m+n} situata in un piano arbitrario α; sia O la traccia a su α. La curva γ avrà in O un punto n^{plo}.

Ordine della superficie focale. L'ordine è dato dal numero dei punti sulla retta a per i quali passano due raggi di [C] infinitamente vicini.

([1]) Segre, *Un' osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori.* Rend. Circ. Mat. Palermo, t. II, pag. 148.

([2]) G. Loria, *Il passato ed il presente delle dottrine geometriche*, pag. 46.

([3]) R. Schumacher, *Classification der algebraischen strahlensysteme.* Math. Ann. XXXVII, pag. 100.

I raggi di [C] uscenti dai punti di a determinano su γ una serie di $g^1{}_n$. Il numero dei punti doppi di questa serie sarà il numero domandato.

Poichè una serie g^r_n su una curva di genere p contiene in generale (1)

$$(r+1)(n+rp-r)$$

gruppi con un punto multiplo secondo $r+1$, si deduce che l' ordine della superficie focale è

$$N = 2(n+p-1) \text{ (2)}.$$

2. *Classe della superficie focale.* Essa è data dal numero dei piani che passano per una retta arbitraria a e nei quali due raggi della [C] sono infinitamente vicini. A sua volta questo numero è dato dalle tangenti che si possono condurre alla curva γ dal punto O. Poichè il fascio delle rette di centro O, nel piano α, determina sulla γ una serie $g^1{}_m$ che ha $2(m+p-1)$ gruppi con un punto doppio, si deduce che la classe della superficie focale è

$$M = 2(m+p-1).$$

3. *Rango della congruenza.* Il numero delle coppie di raggi di [C] che appartengono ad un fascio colla retta a eguaglia il numero delle coppie di punti che sulla curva γ hanno in comune le due serie $g^1{}_n$ $g^1{}_m$ dianzi considerate.

Poichè due serie $g^1{}_n$ $g^1{}_m$ giacenti su una curva di genere p hanno

$$\binom{n-1}{r}(m-r) - \binom{n-2}{r-1}p$$

gruppi di $r+1$ punti comuni (3), si deduce che il rango della congruenza è dato da

$$\varrho = (n-1)(m-1) - p$$

4. Se la retta a coincide con un raggio s della congruenza, la rigata F è dell' ordine $m+n-2$, perchè un piano condotto per s taglia F secondo s, che è $(n-1)^{pla}$, e contiene altri $m-1$ raggi di [C]. La sezione di F con un piano arbitrario α sarà dunque una curva δ dell' ordine $m+n-2$ con punto $(n-1)^{plo}$ in O, e del genere p_1 diverso da p.

(1) Castelnuovo, *Geometria sulle curve algebriche*. R. Acc. Scienze, Torino, vol. XXIV.

(2) Per il sistema ∞^{n-1} di raggi dello spazio S_n se μ è l' ordine del sistema, cioè il numero dei raggi che passano per un punto arbitrario, e se $\mu+\nu$ è l' ordine della rigata che ha per direttrice una retta arbitraria, e se questa rigata è di genere p, l' ordine della varietà focale M_{n-1} è $2(\nu+p-1)$.

(3) Castelnuovo, l. c.

Il raggio s, che tocca la superficie focale in due punti, la incontrerà altrove in $N-4$ punti. In questo caso la serie g^1_{n-1} determinata sulla curva δ dai raggi di [C] uscenti dai punti di s dovrà dare

$$2(n-1+p_1-1)=N-4$$

gruppi con punto doppio; dalla quale relazione si ha

$$p_1=p-1$$

5. Sulla curva δ la serie g^1_{n-1} precedentemente considerata e la serie g^1_{m-1} determinata dalle rette del fascio O, hanno in comune

$$\tau=(n-2)\ (m-2)-p_1$$

gruppi di due punti, e si ha così il numero

$$\tau=(n-2)\ (m-2)-p+1$$

delle coppie di raggi della congruenza che sono in un fascio piano con un raggio arbitrario della congruenza stessa.

6. Quando tre raggi di [C] uscenti da un punto generico dello spazio sono in un piano, diremo che costituiscono una *terna di raggi*; il piano che li contiene lo diremo *piano della terna*; il loro punto comune lo diremo *centro della terna*. I centri delle terne costituiscono una superficie che diremo *superficie delle terne*.

Per determinare l'ordine di questa superficie, cioè il numero dei punti che essa ha comune con una retta arbitraria a, bisognerà determinare quante terne di punti dei gruppi della serie g'_n sulla curva γ si trovano in una retta. Ogni retta del piano α determina su γ una serie g^2_{m+n} e le due serie hanno in comune

$$T'=\binom{n-1}{2}(m+n-2)-(n-2)\,p$$

gruppi di tre punti; dal numero T′ bisogna però togliere due volte (1) il nu-

(1) Così, ad esempio, si consideri la congruenza di 3° ordine e 1ª classe, reciproca di quella formata dalle corde di una cubica sghemba. Per essa la rigata F^4 ha sezioni piane razionali e non esiste superficie delle terne. I valori $n=3$ $m=1$ $p=0$ danno adunque $T'=2$, dal quale togliendo $2\left|\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right|$ si ha appunto $T=0$.

Per un altro esempio, consideriamo la congruenza del 3° ordine e della 6ª classe con 10 punti singolari (Rend. Acc. Lincei vol. VI pag. 8, 1890). Per essa $n=3$, $m=6$, $p=5$. Non esiste superficie delle terne. Infatti se tre raggi $|k|$ immagini dei coni K^3 di F^6_3 fossero in un piano, tre punti singolari della congruenza (3.6) studiata da Castelnuovo (Atti Ist. Veneto, vol. V, pag. 12, 1887) sarebbero in linea retta; il che non può essere perchè i sei punti singolari sono proiettati su un piano arbitrario da ogni asse di F^3_3 in sei punti di una conica. Si ha dunque $T'=2$ dal quale numero togliendo $2\left|\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right|$ si ottiene appunto $T=0$.

mero delle combinazioni 3 a 3 degli n raggi uscenti dal punto O; si avrà così che l' ordine cercato è

$$T = (n-2)\left[\frac{(n-1)(3m+n-6)}{6} - p\right] \text{ [1]}$$

7. Le formole ottenute da Schumacher sono:

$$\begin{aligned} N &= 2\,m\,(n-1) - 2\varrho \\ M &= 2\,n\,(m-1) - 2\varrho \\ \tau &= \varrho - n - m + 4 \\ T &= (n-2)\left[\varrho + \frac{(n-1)(n-3m)}{6}\right] \end{aligned}$$

le quali coincidono con quelle più sopra ottenute.

Fisica biologica. — *Studî sopra l'azione dei raggi Röntgen sui vegetali.* Nota di Giulio Tolomei, presentata dal Socio Blaserna.

Secondo una comunicazione di A. Schober, fatta alla Società botanica germanica, risulterebbe che i raggi Röntgen non esercitano un' influenza sensibile sopra la vita vegetale. Lo Schober sottoponendo delle piante all' azione di un tubo di Hittorf notò che la luce emanata da esso, a differenza di quella del sole, non provoca affatto l' incurvamento eliotropico e ne concluse che i raggi Röntgen non esercitano alcuna influenza sopra lo sviluppo vegetale.

Per altro tale affermazione non è fondata sopra fatti che abbiano un grande valore, perchè la durata dell' esposizione delle piante all' azione della luce del tubo di Hittorf fu solo di trenta minuti, e questa durata non poteva essere sufficiente per produrre in una pianta modificazioni tali da essere apprezzate con osservazioni superficiali.

Fu notato pure [2] che la *Phycomices nitens*, che si curva sotto l' influenza asimmetrica di molti agenti esterni, anche delle onde hertziane secondo Heyler, non è per nulla sensibile all' azione dei raggi Röntgen; ma anche

[1] Ritenute le notazioni precedenti, l' ordine della varietà V_{n-1} luogo dei punti dai quali escono n raggi del sistema situati in uno spazio ad $n-1$ dimensioni, è

$$T = \binom{\nu-1}{n-1}(\mu+\nu-n+1) - \begin{vmatrix}\nu-2\\n-2\end{vmatrix} p - 2\begin{vmatrix}\nu\\n\end{vmatrix};$$

e per un dato raggio del sistema, il numero T dei punti, per ognuno dei quali $n-1$ raggi uscenti da esso si trovano col raggio dato in uno spazio ad $n-1$ dimensioni, è:

$$\tau = \begin{vmatrix}\nu-2\\n-2\end{vmatrix}(\mu-n+1) - \begin{vmatrix}\nu-3\\n-3\end{vmatrix}(p-n+2).$$

[2] *Comptes Rendus*, 30 marzo 1896.