ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

4.° *Comportamento delle soluzioni acide di fluoruro d'argento.*

Aggiungiamo per ora come complemento qualche nota sul comportamento del fluoruro d'argento. Esso fu preparato disciogliendo in un eccesso di acido fluoridico l'ossido umido e filtrando dal residuo. La soluzione *molto acida* (e in tutte le reazioni si ebbe cura che tale restasse) precipita con tutti quei corpi con i quali non precipitano le soluzioni d'argento anche debolmente acide per acido nitrico, e cioè dà precipitato con soluzioni di arseniato, cromato e nitrito potassico (meno intensamente con arseniato potassico) e inoltre bene con acido cloroplatinico e con soluzione di acido solforoso libero.

Matematica. — *Le trasformazioni infinitesime dei gruppi cremoniani tipici dello spazio.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Nella mia Nota: *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio* (1) ho mostrato come alcuni dei gruppi tipici da me incontrati nella classificazione dei gruppi continui imprimitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio, si siano presentati anche al sig. Lie nelle sue ricerche sui gruppi imprimitivi di trasformazioni puntuali (2); e per questi gruppi ho ivi trascritti i simboli delle trasformazioni infinitesime, determinati dallo stesso sig. Lie. Ma anche per gli altri gruppi cremoniani tipici si possono facilmente trovare i simboli delle trasformazioni infinitesime generatrici, deducendoli, nella maggior parte dei casi, dalle equazioni finite dei gruppi stessi. E questo appunto io mi propongo di fare nella presente Nota.

Nella Memoria del sig. Enriques e mia: *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (3) è dimostrato che ogni gruppo continuo di tali trasformazioni può ridursi birazionalmente a un gruppo di una delle categorie seguenti:

a) *gruppi proiettivi*;

b) *gruppi di trasformazioni conformi* (ossia che mutano le sfere in sfere);

c) gruppi che abbiamo chiamati « *di Jonquières generalizzati* », ossia che trasformano in sè stesso un fascio di piani, ovvero una stella di rette;

d) due gruppi ∞^3, semplici, transitivi, ben determinati, composti di trasformazioni del 3° o rispett. del 7° ordine.

(1) Questi Rendiconti, pag. 302.

(2) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, cap. 8.

(3) Annali di Matematica, s. 2ª, t. 26 (1897).

Corrispondentemente a ciascuno dei casi $a)$, $b)$ esiste un unico gruppo *completo*, rispett. ∞^{15} e ∞^{10}, nel quale tutti gli altri gruppi rispett. proiettivi e conformi sono contenuti; vale a dire:

Il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive, generato dalle 15 trasformazioni infinitesime (1):

$$[1] \qquad \begin{gathered} p\,,\; q\,,\; r\,, \\ xp\,,\; xq\,,\; xr\,,\; yp\,,\; yq\,,\; yr\,,\; zp\,,\; zq\,,\; zr\,, \\ x(xp+yq+zr)\,,\; y(xp+yq+zr)\,,\; z(xp+yq+zr); \end{gathered}$$

e il gruppo di tutte le trasformazioni conformi, generato dalle 10 trasformazioni infinitesime (2):

$$[2] \qquad \begin{gathered} p\,,\; q\,,\; r\,,\; xq-yp\,,\; yr-zq\,,\; zp-xr \\ xp+yq+zr \;(\equiv \mathrm{U}) \\ 2x\mathrm{U}-(x^2+y^2+z^2)p\;;\; 2y\mathrm{U}-(x^2+y^2+z^2)q\;;\; 2z\mathrm{U}-(x^2+y^2+z^2)r\,. \end{gathered}$$

I gruppi di Jonquières generalizzati sono stati ricondotti in una mia recente Memoria (3) a *dodici* tipi diversi di gruppi *completi* (non contenuti cioè in altri più ampî, nè riducibili a tali). Fra questi tipi, i primi tre hanno a comune la proprietà di trasformare in sè un fascio di piani e una stella di rette i cui sostegni (asse e centro) non si appartengono, e i tre successivi trasformano in sè una stella di rette, e un sistema lineare di superficie di un certo ordine n aventi nel centro di questa stella un punto $(n-1)^{\text{plo}}$ e uno stesso cono tangente (di ordine $n-1$).

Enumeriamo ora tutti questi gruppi (completi), aggiungendo per ciascuno di essi i simboli delle trasformazioni infinitesime generatrici:

1°. *Gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^5 *di quadriche (paraboloidi iperbolici):*

$$z(ax+by)+cx+dy+ez+f=0\,.$$

Abbiamo già veduto nella mia Nota ultima che questo gruppo è rappresentato dalle equazioni finite:

$$x'=\frac{ax+by+c}{a_2x+b_2y+c_2}\;;\; y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\;;\; z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

(dove $[a\,b_1\,c_2]=\alpha\delta-\beta\gamma=1$), e viene generato dalle 11 trasformazioni infinitesime:

$$p\,,\; q\,,\; xp\,,\; xq\,,\; yp\,,\; yq\,,\; x(xp+yq)\,,\; y(xp+yq)\,,\; r\,,\; zr\,,\; z^2r\,.$$

2°. *Gruppo* ∞^9 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso ciascuno di tre diversi fasci di piani* ($x=$ cost. , $y=$ cost. , $z=$ cost.) *e quindi il sistema lineare* ∞^7 *di superficie del 3° ordine, somma di questi tre fasci:*

$$axyz+byz+czx+dxy+ex+fy+gz+h=0\,.$$

(1) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 124.

(2) Op. e vol. cit., pag. 137.

(3) *I gruppi di Jonquières generalizzati*, attualmente in corso di stampa nelle Memorie dell'Accademia di Torino (vol. 48).

Questo gruppo, rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \; ; \; y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2} \; ; \; z' = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$$

(dove $a_i d_i - b_i c_i = 1$), può evidentemente generarsi colle trasformazioni infinitesime:

$$[4] \qquad p \, , \, xp \, , \, x^2 p \; ; \; q \, , \, yq \, , \, y^2 q \; ; \; r \, , \, zr \, , \, z^2 r .$$

3°. *Gruppo* ∞^{n+7} *delle trasformazioni di ordine* n *che mutano in sè stesso il sistema lineare di superficie:*

$$ay + f_{n-1}(x) + byz + z \, . \, \varphi_{n-1}(x) = 0$$

dove f_{n-1} e φ_{n-1} sono simboli di polinomi affatto arbitrari di grado $n-1$ in x. Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \; ; \; y' = \frac{\lambda y + \psi_{n-1}(x)}{(c_1 x + d_1)^{n-1}} \; ; \; z' = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

(dove $a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$). E di qui si trae facilmente ch'esso può generarsi colle $n+7$ trasformazioni infinitesime:

$$[5] \qquad \begin{array}{c} p \, , \, xp \, , \, x^2 p + (n-1) xyq \\ yq \, , \, q \, , \, xq \, , \, x^2 q \, , \, \ldots \, x^{n-1} q \\ r \, , \, zr \, , \, z^2 r . \end{array}$$

Ciascuno di questi tre gruppi trasforma in sè il fascio di piani $z = \text{cost.}$ e la stella di rette $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$

Veniamo ora ai tre tipi (4°, 5°, 6°) che lasciano invariata una stella di rette — che supporremo ancora essere quella delle rette parallele all'asse z —, e un sistema lineare di monoidi aventi nel centro (improprio) di questa stella uno stesso cono tangente (qui ridotto al piano all'infinito contato un numero opportuno di volte):

4°. *Gruppo dipendente da* $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 9$ *parametri, che trasforma in sè il sistema lineare di superficie, di dimensione* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$:

$$z = F_n(x \, , y)$$

dove F_n è un polinomio arbitrario di grado n in $x \, , y$. Alle equazioni finite di questo gruppo:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2} \; ; \; y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \; ; \; z' = \frac{z + \Phi_n(x \, , y)}{(a_2 x + b_2 y + c_2)^n}$$

abbiamo già veduto nella mia Nota ultima che corrispondono le trasformazioni infinitesime:

$$[6] \qquad \begin{array}{c} p \, , \, q \, , \, xq \, , \, xp - yq \, , \, yp \, , \, xp + yq \, , \, x(xp + yq + nzr) \, , \, y(xp + yq + nzr) \\ zr \, , \, x^\varrho y^\sigma r \quad (\varrho + \sigma = 0 \, , 1 \, , 2 \ldots n) . \end{array}$$

5°. *Gruppo dipendente da* $(m+1)(n+1) + 7$ *parametri, che trasforma in sè il sistema lineare di superficie, di dimensione* $(m+1)(n+1)$:

$$z = x^m f_0(y) + x^{m-1} f_1(y) + \cdots + f_m(y)$$

dove le f sono polinomi di grado n in y. Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \; ; \; y' = \frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2} \; ; \; z' = \frac{\lambda z + x^m \varphi_0(y) + x^{m-1} \varphi_1(y) + \cdots + \varphi_m(y)}{(c_1 x + d_1)^m (c_2 x + d_2)^n}$$

dove $a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$, e le φ sono ancora polinomi qualunque di grado n in y. E di qui si trae facilmente che il gruppo stesso può generarsi colle $(m+1)(n+1)+7$ trasformazioni infinitesime:

$$[7] \qquad \begin{gathered} p \, , \, xp \, , \, x(xp + mzr) \; ; \; q \, , \, yq \, , \, y(yq + nzr) \; ; \\ zr \, , \, x^\varrho y^\sigma r \quad \begin{cases} \varrho = 0, 1, 2, \ldots m \\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots n \end{cases} . \end{gathered}$$

6°. *Gruppo dipendente da* $m\binom{n+1}{2} + (n+1)(l+1) + m + 6$ *parametri, che trasforma in sè il sistema lineare di superficie, di dimensione* $m\binom{n+1}{2} + (n+1)(l+1)$:

$$z = y^n f_l(x) + y^{n-1} f_{l+m}(x) + \cdots + f_{l+mn}(x)$$

dove le f sono polinomi in x di gradi eguali ai rispettivi indici. Le equazioni di questo gruppo sono:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \; ; \; y' = \frac{\lambda y + F_m(x)}{(cx+d)^m} \; ; \; z' = \frac{\mu z + y^n \varphi_l(x) + \cdots + \varphi_{l+mn}(x)}{(cx+d)^{l+mn}}$$

dove $ad - bc = 1$, e F_m e le φ sono ancora polinomi in x, di gradi eguali ai rispettivi indici. Di qui si deducono le trasformazioni infinitesime:

$$[8] \qquad \begin{gathered} p \, , \, xp \, , \, x[xp + myq + (l+mn)zr] \\ yq \, , \, q \, , \, xq \, , \, x^2 q \, , \ldots x^m q \\ zr \, , \, x^\varrho y^\sigma r \quad \begin{cases} \sigma = 0, 1, 2, \ldots n \\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots (n-\sigma)m + l . \end{cases} \end{gathered}$$

E continuando nell'enumerazione:

7°. *Gruppo* ∞^{2n+9} *delle trasformazioni di ordine* n *che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{n+2} *di cilindri* (colle generatrici parallele al piano xy):

$$\lambda x + \mu y + f_n(z) = 0 .$$

Questo gruppo (già incontrato nell'ultima mia Nota) è rappresentato dalle equazioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \; ; \; x' = \frac{ax + by + \varphi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n} \; ; \; y' = \frac{cx + dy + \psi_n(z)}{(\gamma z + \delta)^n}$$

(essendo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$); e contiene le $2n+9$ trasformazioni infinitesime:

$$[9] \qquad \begin{gathered} xp \, , \, xq \, , \, yp \, , \, yq \, , \, r \, , \, zr \, , \, z^2 r + nz(xp + yq) \\ p \, , \, zp \, , \, z^2 p \, , \ldots z^n p \\ q \, , \, zq \, , \, z^2 q \, , \ldots z^n q . \end{gathered}$$

8°. *Gruppo* ∞^7 *delle trasformazioni di ordine* $m+n-1$ *che* *mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{m+n+1} *delle superficie d'ordine* $m+n-1$:

$$\varphi_m(x\,,y)+x^{m-1}\,\varphi_n(z)=0$$

dove φ_m è un polinomio *omogeneo* di grado m nelle $x\,,y$, e φ_n è un polinomio arbitrario di grado n in z. Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x'=\frac{(ax+by)^m}{x^{m-1}(\gamma z+\delta)^n}\ ;\ y'=\frac{(ax+by)^{m-1}\,(cx+dy)}{x^{m-1}(\gamma z+\delta)^n}\ ;\ z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

nelle quali sono parametri omogenei le potenze m^{esime} delle $a\,,b\,,c\,,d$ e le potenze n^{esime} delle $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta$; sicchè, in un'operazione generica, si può supporre uno dei parametri, ad es. δ, eguale all'unità.

Ponendo $a=d=\delta=1$, $b=c=0$, e facendo variare $\alpha\,,\beta\,,\gamma$, si hanno ∞^3 operazioni che risultano generate dalle trasformazioni infinitesime:

$$r\ ,\ zr\ ,\ z^2r+nz(xp+yq)\,.$$

Ponendo invece $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=b=0$, e facendo variare le $a\,,c\,,d$, si hanno altre ∞^3 operazioni, generabili colle trasformazioni infinitesime:

$$xp\ ,\ xq\ ,\ yq\,.$$

E infine ponendo $a=d=\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=c=0$, rimane il gruppo ∞^1:

$$x'=\frac{(x+by)^m}{x^{m-1}}\ ;\ y'=y\,\frac{(x+by)^{m-1}}{x^{m-1}}\ ;\ z'=z$$

dalle cui equazioni si ricava:

$$\frac{dx'}{db}=my'\ ;\ \frac{dy'}{db}=(m-1)\,\frac{y'^2}{x'}$$

sicchè la trasformazione infinitesima che genera quest'ultimo gruppo avrà per simbolo:

$$myp+(m-1)\,\frac{y^2}{x}\,q\,.$$

E l'intero gruppo ∞^7 sarà perciò generato dalle trasformazioni infinitesime:

$$[10]\qquad r\ ,\ zr\ ,\ z^2r+nz(xp+yq)\ ,\ xp\ ,\ xq\ ,\ yq\ ,\ myp+(m-1)\,\frac{y^2}{x}\,q\,.$$

9°. *Gruppo dipendente da* $m\binom{n+1}{2}-n+m+5$ *parametri, che trasforma in sè stesso il sistema lineare di superficie, di dimensione* $m\binom{n+1}{2}+1$:

$$x\{y^{n-1}\varphi_{m-1}+y^{n-2}\varphi_{2m-1}+\cdots+\varphi_{mn-1}\}=(\alpha x+1)\,z+a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n$$

dove le φ sono polinomi arbitrari in x, di gradi eguali ai rispettivi indici, α è un ulteriore parametro, e le a_i sono coefficienti costanti. Questo gruppo risulta dalla moltiplicazione delle schiere seguenti (le quali sono anzi altrettanti gruppi, fatta eccezione per la [C]):

$$[\mathrm{A}]\ \ x'=x\,;\,y'=y\,;\,z'=z+x\,\{y^{n-1}\xi_{m-2}(x)+y^{n-2}\xi_{2m-2}(x)+\cdots+\xi_{mn-2}(x)\}$$

generata dalle trasformazioni infinitesime:

$$x^{\varrho} y^{\sigma} r \quad \begin{cases} \sigma = 0, 1, 2, \dots n-1 \\ \varrho = 1, 2, \dots\dots (n-\sigma)m - 1 \end{cases}$$

in numero di $m\binom{n+1}{2} - n$. Poi:

$$[B] \qquad x' = x \; ; \; y' = y + x \, . \, \eta_{m-1}(x) \; ; \; z' = z$$

generata dalle trasformazioni infinitesime:

$$xq \; , \; x^2 q \; , \dots x^m q$$

in numero di m. Poi ancora la schiera:

$$[C] \qquad x' = \frac{ax}{cx+d} \; ; \; y' = \frac{y+k}{(cx+d)^m} \; ;$$

$$z' = \frac{1}{d(cx+d)^{mn-1}} \left\{ z + a_0 y^n + \cdots + a_n - [a_0(y+k)^n + a_1 d^m (y+k)^{n-1} + \cdots] \right\}$$

la quale può generarsi colle trasformazioni infinitesime:

$$xp \; ; \; x\{xp + myq + (mn-1)zr\} \; ;$$
$$yq + \{nz + a_1 y^{n-1} + 2a_2 y^{n-2} + \cdots + na_n\} r \; ;$$
$$q - \{na_0 y^{n-1} + (n-1) a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\} r .$$

E infine il gruppo ∞^1:

$$[D] \quad x' = x + b \; ; \; y' = y \; ; \; z' = \frac{x+b}{x} z + \frac{b}{x}(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n)$$

generato dalla trasformazione infinitesima:

$$p + \frac{z + a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n}{x} r .$$

Sicchè, riassumendo, il gruppo complessivo risulterà generato dalle $m\binom{n+1}{2} - n + m + 5$ trasformazioni infinitesime:

$$[11] \quad \begin{aligned} & x^{\varrho} y^{\sigma} r \; ; \; [0 \leq \sigma \leq n-1 \; ; \; 1 \leq \varrho \leq (n-\sigma)m - 1] \\ & xp \; ; \; xq, x^2 q, \dots x^m q \; ; \; x\{xp + myq + (mn-1)zr\} \; ; \\ & yq + \{nz + a_1 y^{n-1} + 2a_2 y^{n-2} + \cdots + na_n\} r \; ; \\ & q - \{na_0 y^{n-1} + (n-1) a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\} \; ; \\ & p + \frac{z + a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n}{x} r . \end{aligned}$$

10°. *Gruppo intransitivo ∞^3 delle trasformazioni di ordine n che mutano in sè stesso ogni piano $z =$ cost., e il sistema lineare ∞^{n+2} di superficie di ordine n:*

$$y\{\alpha x + \beta y + \varphi_{n-1}(z)\} = x^2 + x f_{n-1}(z) + f_n(z)$$

dove i coefficienti di $f_{n-1}(z)$ e $f_n(z)$ si suppongono costanti, e variabili invece tutti quelli di $\varphi_{n-1}(z)$ (1). Questo gruppo ∞^3 risulta dalla moltiplicazione

(1) Quest' equazione è ottenuta da quella data al n. 15 della mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati,* facendo coincidere gli $n-2$ piani tangenti $f_{n-2}(x_1 x_2) = 0$ col piano $x_2 = 0$, e passando poi a coordinare cartesiane non omogenee

$$x = \frac{x_4}{x_2} , \quad y = \frac{x_3}{x_2} , \quad z = \frac{x_1}{x_2} .$$

del gruppo proiettivo ∞^2:

$$x' = x + by \; ; \; y' = ay \; ; \; z' = z$$

generato dalle trasformazioni infinitesime yp, yq, per il gruppo ∞^1:

$$x' = x + c\,\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} \; ; \; y' = y + c(2x + f_{n-1}) + c^2\,\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} \; ; \; z' = z \text{(1)}$$

Da queste equazioni si trae facilmente che:

$$\frac{x'^2 + x'f_{n-1} + f_n}{y'} = \frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} .$$

E quindi:

$$\frac{dx'}{dc} = \frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} = \frac{x'^2 + x'f_{n-1} + f_n}{y'} \; ;$$

$$\frac{dy'}{dc} = 2x + f_{n-1} + 2c\,\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y} = 2x' + f_{n-1} .$$

Sicchè l'ultimo gruppo ∞^1 risulta generato dalla trasformazione infinitesima:

$$\frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y}\,p + (2x + f_{n-1})\,q$$

e l'intero gruppo ∞^3 dalle tre trasformazioni:

$$[12] \qquad yp \; , \; yq \; , \; \frac{x^2 + xf_{n-1} + f_n}{y}\,p + (2x + f_{n-1})\,q \, .$$

11°. *Gruppo ∞^8 delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare ∞^7 di superficie del 3° ordine* (2):

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)(y - xz) + (\alpha_2 x + \beta_2 y)z + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma z + \delta = 0 .$$

Questo gruppo è rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2} \; ; \; y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \; ; \; z' = \frac{\mathrm{A}z - \mathrm{B} + \mathrm{C}(y - xz)}{-\mathrm{A}_1 z + \mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1(y - xz)}$$

dove le lettere maiuscole indicano i subdeterminanti del determinante $[ab_1c_2]$ (che può supporsi $= 1$); e viene generato dalle trasformazioni infinitesime:

$$[13] \qquad \begin{gathered} p \; , \; q \; , \; xq + r \; , \; xp - yq - 2zr \; , \; yp - z^2 r \; , \; xp + yq \\ x^2 p + xyq + (y - xz)\,r \; , \; xyp + y^2 q + z(y - xz)\,r \, . \end{gathered}$$

12°. *Gruppo tipico ∞^3, semplice, transitivo, corrispondente al caso diedrico di un dato ordine $2n$* ($n \geq 3$). Questo gruppo è equivalente al gruppo delle ∞^3 trasformazioni proiettive sulla varietà delle corde di una C^n

(1) Queste equazioni si ricavano da quelle date al n. 15 della mia Mem. cit., ponendovi $a = d = 1$, $b = 0$; e quelle del precedente gruppo ∞^2 si ottengono ponendo $c = 0$ (e scrivendo a, b in luogo rispett. di a^2, ab).

(2) Al gruppo incontrato al n. 28 della mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati*, sostituiamo quest'altro, ad esso equivalente, secondo quanto è detto al n. 3 dell'ultima mia Nota di questi Rendiconti.

(razionale, normale) di S_n; e di qui conviene prender le mosse per trovarne le trasformazioni infinitesime.

Ricordiamo perciò che il gruppo proiettivo ∞^3 di uno spazio S_n rispetto al quale è invariante la curva (razionale, normale):

$$\left\|\begin{matrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_n \end{matrix}\right\| = 0$$

contiene le tre trasformazioni infinitesime (¹):

$$p_1 + 2x_1 p_2 + \cdots + nx_{n-1} p_n$$
$$x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + \cdots + nx_n p_n$$
$$(n-1)x_2 p_1 + (n-2)x_3 p_2 + \cdots + x_n p_{n-1} - nx_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n).$$

Per ricavare di qui le trasformazioni infinitesime del gruppo ∞^3 subordinato sulla varietà M_3 delle corde della C^n, le cui equazioni, risolute rispetto a $x_4, x_5, \ldots x_n$, si trovano nella mia Memoria: *I gruppi di Jonquières generalizzati* (n. 34), basta sopprimere nei simboli testè scritti i termini contenenti le $p_4, p_5, \ldots p_n$, e, nei termini che rimangono, sostituire a $x_4, x_5, \ldots$ le loro espressioni mediante x_1, x_2, x_3 date da quelle stesse equazioni (²). Ora l'unica sostituzione che qui rimane a farsi è quella di x_4 nel termine $(n-3)x_4 p_3$ del terzo simbolo; introducendo pertanto in luogo della x_4 stessa la sua espressione:

$$x_4 = \frac{x_3^2 + x_2^3 - 2x_1 x_2 x_3}{x_2 - x_1^2}$$

e adottando per comodità le solite notazioni x, y, z, p, q, r, avremo i tre simboli:

$$[14] \qquad p + 2xq + 3yr \quad , \quad xp + 2yq + 3zr$$
$$(n-1)yp + (n-2)zq + (n-3)\frac{z^2 + y^3 - 2xyz}{y - x^2} r - nx(xp + yq + zr)$$

e queste stesse saranno altresì le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo cremoniano di S_3, il quale si otteneva dal gruppo proiettivo ∞^3 sulla varietà delle corde della C^n mediante una proiezione (univoca) dallo spazio (S_{n-4}) all' infinito di $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Lo stesso ragionamento permette altresì di trovare le trasformazioni infinitesime dei gruppi tipici corrispondenti al caso *d*) dell' accennata classificazione del sig. Enriques e mia, ossia dei gruppi ∞^3 semplici, transitivi, del tipo *ottaedrico* e *icosaedrico* (Mem. cit., §§ 26, 27). Questi due gruppi sono equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà M_3 appartenenti rispett. a uno spazio S_6 o S_{12} e invarianti rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 con una C_6 o C_{12} fissa. Dobbiamo dunque supporre rispett. $n = 6$ e $n = 12$; e l' espressione

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pag. 187.

(²) Op. cit., vol. I, pag. 233-34.

da sostituirsi a x_4 è in ambo i casi (cfr. l. cit.) la seguente: $4x_1 x_3 - 3x_2^2$. Nel caso ottaedrico avremo perciò le trasformazioni infinitesime:

$$[15] \qquad p + 2xq + 3yr \;,\; xp + 2yq + 3zr$$
$$5yp + 4zq + 3(4xz - 3y^2)r - 6x(xp + yq + zr)\,;$$

e nel caso icosaedrico:

$$[16] \qquad p + 2xq + 3yr \;,\; yp + 2yq + 3zr$$
$$11yp + 10zq + 9(4xz - 3y^2)r - 12x(xp + yq + zr)\,.$$

Il sottogruppo ∞^2 generato dalle prime due trasformazioni infinitesime è sempre un gruppo proiettivo (con una cubica fissa, e un punto fisso sopra questa cubica).

Concludiamo pertanto: *Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio è riducibile birazionalmente a uno dei gruppi* [1] ... [16] *dei quali in questa Nota sono assegnate le trasformazioni infinitesime, ovvero a un sottogruppo di uno di essi.*

Matematica. — *Un teorema relativo agli invarianti delle sostituzioni di un gruppo Kleiniano.* Nota del dott. G. BAGNERA, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. È noto ed è facile verificare che, data una sostituzione

$$T = \left(z\,,\,\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

dove a, b, c, d sono numeri reali od immaginarî che soddisfano alla condizione

$$ad - bc = 1\,,$$

la somma $a + d$ è la stessa per tutte le trasformate di T mediante altre sostituzioni della stessa natura.

Ciò giustifica il nome d'*invariante* della sostituzione T dato alla detta somma; invariante, che io voglio qui brevemente denotare col simbolo [T].

Se Γ è un gruppo, che contiene un numero infinito di tali sostituzioni, generato però da n sostituzioni fondamentali

$$A\,, B\,, \ldots\,, L\,,$$

ad esempio, se Γ è un gruppo Kleiniano, il sig. H. Poincarè, in un suo lavoro [1], ha dimostrato che gl'invarianti di tutte le sostituzioni di Γ sono

[1] *Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique.* Journal de mathématiques pures et appliquées, 1887.