ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

da sostituirsi a x_4 è in ambo i casi (cfr. l. cit.) la seguente: $4x_1 x_3 - 3x_2^2$. Nel caso ottaedrico avremo perciò le trasformazioni infinitesime:

$$[15] \qquad p + 2xq + 3yr \ , \quad xp + 2yq + 3zr$$
$$5yp + 4zq + 3(4xz - 3y^2)r - 6x(xp + yq + zr) ;$$

e nel caso icosaedrico:

$$[16] \qquad p + 2xq + 3yr \ , \quad yp + 2yq + 3zr$$
$$11yp + 10zq + 9(4xz - 3y^2)r - 12x(xp + yq + zr) .$$

Il sottogruppo ∞^2 generato dalle prime due trasformazioni infinitesime è sempre un gruppo proiettivo (con una cubica fissa, e un punto fisso sopra questa cubica).

Concludiamo pertanto: *Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio è riducibile birazionalmente a uno dei gruppi* [1] ... [16] *dei quali in questa Nota sono assegnate le trasformazioni infinitesime, ovvero a un sottogruppo di uno di essi.*

Matematica. — *Un teorema relativo agli invarianti delle sostituzioni di un gruppo Kleiniano.* Nota del dott. G. Bagnera, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. È noto ed è facile verificare che, data una sostituzione

$$T = \left(z , \frac{az + b}{cz + d} \right) ,$$

dove a, b, c, d sono numeri reali od immaginarî che soddisfano alla condizione

$$ad - bc = 1 ,$$

la somma $a + d$ è la stessa per tutte le trasformate di T mediante altre sostituzioni della stessa natura.

Ciò giustifica il nome d'*invariante* della sostituzione T dato alla detta somma; invariante, che io voglio qui brevemente denotare col simbolo [T].

Se Γ è un gruppo, che contiene un numero infinito di tali sostituzioni, generato però da n sostituzioni fondamentali

$$A , B , \ldots , L ,$$

ad esempio, se Γ è un gruppo Kleiniano, il sig. H. Poincaré, in un suo lavoro [1], ha dimostrato che gl'invarianti di tutte le sostituzioni di Γ sono

[1] *Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique.* Journal de mathématiques pures et appliquées, 1887.

funzioni razionali intere di un numero finito d'invarianti fondamentali, i quali si ottengono da

$$[A^{\alpha} B^{\beta} \dots L^{\lambda}]$$

attribuendo agli esponenti $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ i valori 0 ed 1 in tutte le maniere possibili.

Gl'invarianti fondamentali, quando è $n > 2$, non sono algebricamente indipendenti e, convenendo di chiamare *ordine* di un tale invariante il numero delle sostituzioni fondamentali che entrano nella sua espressione, io voglio qui dimostrare il seguente teorema:

Un invariante d'ordine $r > 2$ è radice di una equazione algebrica, i cui coefficienti sono funzioni razionali intere degli invarianti fondamentali di 1° e 2° ordine e che è risolubile mediante estrazioni di radici quadrate.

2. Denoti T una sostituzione qualunque di un gruppo Γ: essa è una combinazione di un numero finito di sostituzioni fondamentali e delle loro inverse; ma, data T, pensando alla proprietà associativa delle operazioni del gruppo Γ e, se questo è un gruppo Kleiniano, anche alle relazioni che esprimono la discontinuità propria del detto gruppo, si possono immaginare infinite altre di tali combinazioni che riproducono la sostituzione T.

Relativamente a questo fatto, si conviene di chiamare *esponente* di T, rispetto ad un sistema di sostituzioni fondamentali già fissato, il minimo numero delle sostituzioni del detto sistema, dirette od inverse, eguali o diseguali, che occorrono per formare T.

È chiaro che le sostituzioni di un gruppo Γ, generato da un numero finito di sostituzioni fondamentali, costituiscono un insieme numerabile. Infatti, ripetendo l'osservazione che ha servito al sig. G. Cantor per dimostrare la stessa proprietà pei numeri algebrici, tutte le sostituzioni di Γ, che hanno un dato esponente μ, sono evidentemente in numero finito e perciò si possono ordinare. Allora, facendo successivamente $\mu = 0, 1, 2, \dots$, io posso scrivere prima la sostituzione identica, poi le sostituzioni che hanno l'esponente 1 nell'ordine stabilito, poi le sostituzioni che hanno l'esponente 2 nell'ordine stabilito, e così di seguito.

3. Ciò posto, sia TA^p una sostituzione di Γ che abbia come esponente quello di T aumentato del valore assoluto dell'intero p. Per qualunque valore positivo o negativo di p, si ha

$$[TA^p] = [TA] P_1 + [T] P_2 \tag{1}$$

dove P_1 e P_2 sono due polinomî rispetto ad $[A]$.

Infatti, se T_1 e T_2 sono due arbitrarie sostituzioni di Γ, si può facilmente verificare l'identità

$$[T_2 T_1^{-1}] = [T_2][T_1] - [T_1 T_2]; \tag{2}$$

donde, cambiando T_2 e T_1 rispettivamente in TA^{p-1} ed A, si trae l'equazione ricorrente [1]

$$(3) \qquad [TA^p] = [TA^{p-1}][A] - [TA^{p-2}],$$

la quale dimostra la (1) quando è $p > 0$.

Nel caso in cui è $p < 0$, si conclude egualmente scrivendo la (3) nel seguente modo:

$$[TA^{p-2}] = [TA^{p-1}][A] - [TA^p].$$

Per il calcolo effettivo di $[TA^p]$ è utile conoscere le espressioni dei polinomî P_1 e P_2.

Se ϱ_1 e ϱ_2 sono i moltiplicatori della sostituzione A, cioè a dire le radici dell'equazione di secondo grado

$$\varrho^2 - [A]\varrho - 1 = 0,$$

si soddisfa alla (3) ponendo

$$[TA^p] = h\varrho_1^p + k\varrho_2^p$$

dove h e k sono due numeri indipendenti da p, che debbono essere determinati in modo che sia

$$[TA] = h\varrho_1 + k\varrho_2, \quad [T] = h + k.$$

Si ottiene così la relazione

$$(4) \qquad [TA^p] = [TA]\frac{\varrho_1^p - \varrho_2^p}{\varrho_1 - \varrho_2} - [T]\frac{\varrho_1^{p-1} - \varrho_2^{p-1}}{\varrho_1 - \varrho_2};$$

quindi, se è $p > 0$, un calcolo facile mostra che è

$$P_1 = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{\binom{p}{1}[A]^{p-1} + \binom{p}{3}[A]^{p-3}\left([A]^2 - 4\right) + \binom{p}{5}[A]^{p-5}\left([A]^2 - 4\right)^2 + \cdots\right\}$$

ed il polinomio P_2 si ottiene cambiando di segno l'espressione di P_1 dopo avere scritto $p-1$ al posto di p.

Nel caso in cui è $p < 0$, tenendo presente la (4) e che è $\varrho_1\varrho_2 = 1$, si vede che i polinomî P_1 e P_2 si cambiano rispettivamente nei polinomî P_2 e P_1 relativi all'espressione di $[TA^{-p+1}]$.

La formola (1) mostra che l'invariante della sostituzione TA^p si esprime linearmente mediante l'invariante della sostituzione T e quello della sostituzione TA, dove la sostituzione fondamentale A, che figura come ultimo fattore, ha l'esponente eguale ad 1.

4. L'esponente μ della sostituzione

$$T_1 A^p B^q T_2$$

[1] Vedi Poincaré, l. cit.

sia la somma degli esponenti delle sostituzioni T_1 e T_2 aumentata della somma dei valori assoluti degli interi p e q, che io suppongo entrambi diversi da zero.

Voglio ora dimostrare che, se le sostituzioni T_1 e T_2 non coincidono contemporaneamente con la sostituzione identica, la somma

$$[T_1 A^p B^q T_2] + [T_1 B^q A^p T_2]$$

si esprime mediante una funzione intera e razionale d'invarianti, che hanno l'esponente minore di μ.

Si osservi anzitutto che, qualunque siano le sostituzioni T_1 e T_2, si ha identicamente

$$[T_1 T_2] = [T_2 T_1]$$

perchè la sostituzione $T_2 T_1$ si può anche scrivere $T_1^{-1} (T_1 T_2) T_1$.

Ciò posto, applicando successivamente la (2), si hanno le formole

$$[(T_2 T_1 A^{-p}) (B^q)^{-1}] = [T_2 T_1 A^{-p}] [B^q] - [T_2 T_1 A^{-p} B^q],$$
$$[(T_2 T_1) (A^p)^{-1}] = [T_2 T_1] [A^p] - [T_2 T_1 A^p],$$
$$[T_2 T_1 A^{-p} B^q] = [(B^q T_2 T_1) (A^p)^{-1}] = [B^q T_2 T_1] [A^p] - [B^q T_2 T_1 A^p]$$

dalle quali si deduce

$$[T_2 T_1 A^{-p} B^{-q}] =$$
$$= [T_2 T_1 A^p B^q] - [T_1 A^p T_2] [B^q] - [T_1 B^q T_2] [A^p] + [T_1 T_2] [A^p] [B^q];$$

poi, applicando nuovamente la stessa trasformazione, si trova

$$[(T_2 T_1) (B^q A^p)^{-1}] = [T_2 T_1] [B^q A^p] - [T_2 T_1 B^q A^p].$$

Giacchè i primi membri delle due relazioni precedenti sono eguali, tenendo presente l'osservazione premessa, risulta la formola

$$[T_1 A^p B^q T_2] + [T_1 B^q A^p T_2] = \tag{5}$$
$$= [T_1 A^p T_2] [B^q] + [T_1 B^q T_2] [A^p] - [T_1 T_2] \left([A^p] [B^q] - [A^p B^q]\right)$$

la quale dimostra la mia asserzione.

Dunque l'invariante della sostituzione $T_1 A^p B^q T_2$ si esprime mediante l'invariante della sostituzione $T_1 B^q A^p T_2$, che differisce dalla prima per lo scambio di due fattori consecutivi, e gl'invarianti di altre sostituzioni, che hanno esponenti inferiori a μ.

5. Dal momento che il numero delle sostituzioni che hanno l'esponente inferiore a μ è finito, è chiaro che, applicando un numero finito di volte il risultato precedente, si giunge ad esprimere l'invariante di una sostituzione qualunque di Γ mediante invarianti di sostituzioni tali che, in ognuna di esse, le sostituzioni fondamentali che vi figurano, si presentino ciascuna una sola volta ed in un ordine prestabilito.

Quindi si può ritenere che l'invariante di ogni sostituzione di Γ sia una funzione razionale intera d'invarianti del tipo

$$(6) \qquad [A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda]$$

dove $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sono numeri interi arbitrari.

Ora, se nell'invariante (6) figura una sostituzione fondamentale A con l'esponente $\alpha \neq 1$, io posso permutare circolarmente i diversi fattori che figurano nell'invariante (6), il che non altera il detto invariante, in modo da portare in ultimo posto A^α; poi, applicando la formola (1), riduco l'esponente α all'unità.

Si viene così a stabilire il risultato di cui ho discorso precedentemente del sig. Poincaré; ma il procedimento che io ho seguito, oltre che conduce al risultato generale in modo diretto, mette in rilievo il fatto importante che segue.

Quando si esprime l'invariante di una sostituzione qualunque di Γ mediante gl'invarianti fondamentali, il massimo ordine degli invarianti fondamentali, che si presentano, non supera evidentemente il numero delle sostituzioni fondamentali distinte che figurano nella sostituzione data; dippiù, le formole (1) e (5) mostrano che la detta espressione risulta *lineare* rispetto agli invarianti di ordine non inferiore a 3.

6. Ciò posto, dato un invariante fondamentale

$$[AB \dots H]$$

d'ordine $r > 2$, si può subito verificare l'identità

$$[(AB \dots H)^2] = [AB \dots H]^2 - 2\,.$$

D'altra parte, scrivendo l'invariante del primo membro sotto la forma

$$[AB \dots H\ AB \dots H]$$

e riducendo con le formole (5) e (1), si vede facilmente che esso si esprime con una funzione lineare intera dell'invariante $[AB \dots H]$, che ha per coefficienti funzioni razionali intere di invarianti fondamentali d'ordine inferiore ad r.

Paragonando le due espressioni ottenute si ha un'equazione del tipo

$$[AB \dots H]^2 + [AB \dots H]\,\Phi + \Psi = 0$$

dove Φ e Ψ sono funzioni intere e razionali d'invarianti fondamentali di ordine inferiore ad r.

Dunque, aggiungendo al campo di razionalità i valori degli invarianti fondamentali il cui ordine non supera $r-1$, ogni invariante d'ordine r si ottiene mediante una estrazione di radice quadrata. Poi, se $r-1$ supera 2, aggiungendo al campo di razionalità soltanto i valori degli invarianti fondamentali il cui ordine non supera $r-2$, ogni invariante fondamentale di ordine $r-1$ si ottiene mediante una estrazione di radice quadrata. Così proseguendo si conclude che, aggiungendo al campo di razionalità soltanto gli invarianti di 1° e 2° ordine, ogni invariante fondamentale, il cui ordine supera 2, è radice di una equazione algebrica risolubile con estrazioni di radici quadrate; ed è bene notare che in una tale equazione il coefficiente del termine di grado più elevato è sempre l'unità.

7. Per esempio, ponendo

$$[A]=u_1\,,\ [B]=u_2\,,\ [C]=u_3\,,$$
$$[BC]=v_1\,,\ [CA]=v_2\,,\ [AB]=v_3\,,$$

e chiamando w l'invariante fondamentale del 3° ordine $[ABC]$, si ha:

$$[(ABC)^2]=w^2-2\,;$$

poi, applicando la formola (5) all'invariante

$$[A(BC)(AB)C],$$

si trova subito

$$[(ABC)^2]=-[A^2B^2C^2]+[A^2BC]\,v_1+[AB^2C]\,v_2+[ABC^2]\,v_3-v_1v_2v_3\,;$$

dopo ciò, riducendo gli esponenti all'unità si ottiene

$$[(ABC)^2]=(v_1u_2u_3+v_2u_3u_1+v_3u_1u_2-v_1v_2v_3)+$$
$$+w(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)-(u_1^2+u_2^2+u_3^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2-2).$$

Confrontando le due espressioni di $[(ABC)^2]$ si giunge all'equazione [1]

$$w^2-w(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)-(v_1u_2u_3+v_2u_3u_1+v_3u_1u_2-v_1v_2v_3)+$$
$$+(u_1^2+u_2^2+u_3^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2-4)=0\,.$$

Quando si scambia ad es. A con B, l'invariante u_1 si scambia con u_2 e l'invariante v_1 con v_2, mentre u_3 e v_3 restano inalterati. Dunque, facendo tale scambio, non si alterano i coefficienti della precedente equazione e perciò, se una radice della detta equazione è

$$[ABC]=[BCA]=[CAB]\,,$$

l'altra radice è

$$[BAC]=[ACB]=[CBA]\,.$$

Che cosa accade in generale? Ecco una questione che merita di essere studiata.

8. Io termino osservando che gl'invarianti fondamentali di 1° e 2° ordine non sono, in generale, algebricamente indipendenti tra loro. Ognuna delle n sostituzioni fondamentali del gruppo Γ dipende da 3 parametri; mentre gli invarianti fondamentali di 1° e 2° ordine sono in numero di $\frac{1}{2}\,n(n+1)$.

[1] Cfr Poincaré, l. cit.

Quindi, se n supera 5, tra i detti invarianti passano necessariamente $\frac{1}{2}n(n-5)$ relazioni algebriche.

Ma di tali relazioni potrebbero esservene un maggiore numero nel caso che Γ sia un gruppo Kleiniano; giacchè allora i $3n$ parametri, da cui dipendono le sostituzioni fondamentali del detto gruppo, debbono, in generale, soddisfare a certe equazioni, non necessariamente algebriche, che intervengono quando si cerca di esprimere la discontinuità propria di Γ.

Fisica matematica. — *Sulla temperatura di un conduttore lineare bimetallico.* Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Per la parte della termodinamica che considera i fenomeni termoelettrici designati coi nomi dei loro scopritori Peltier e Thomson è di somma importanza conoscere la temperatura di un conduttore bimetallico percorso da una corrente. I fenomeni termoelettrici di Peltier e Thomson sono infatti riversibili e si può quindi loro applicare il secondo principio della termodinamica; ma per far questo rigorosamente è necessario di dedurre lo stato termico del conduttore tenendo conto di tutti i fenomeni di trasporto di calore prodotti dalle conducibilità termiche dei metalli componenti il circuito. Solo dopo aver stabilito con tutta l' esattezza necessaria l' equazione esprimente la temperatura di ogni punto del conduttore, sarà possibile di dedurre un metodo di misura sicuro per determinare i coefficienti dei detti fenomeni termoelettrici, di eseguire per essi la verifica dei principî della termodinamica, come già si fece per gran parte degli altri fenomeni termici e finalmente di tentare la soluzione del problema delle relazioni fra i poteri conduttori termici ed elettrici, e gli effetti termoelettrici nei metalli.

Scopo della presente Nota e di alcune altre che si pubblicheranno nei prossimi Rendiconti è appunto la deduzione dello stato termico di un conduttore lineare bimetallico percorso da una corrente costante, dei fenomeni che si producono coll' inversioue della corrente e delle relative conseguenze.

Per non complicare troppo il problema supporremo le estremità del conduttore e l' aria ambiente mantenuta ad una temperatura costante che assumeremo come zero; questa supposizione, come la più facile da realizzare fisicamente ci faciliterà le applicazioni della teoria.

Deduzione dell' equazione differenziale. — Poniamo nell' asse di un conduttore lineare composto di due fili metallici di lunghezza l_1 ed l_2 l' asse delle ascisse. Indichiamo rispettivamente con x_1 ed x_2 le ascisse della prima e della seconda parte del filo, ponendo l' origine delle x_1 nell' estremità del primo filo e l' origine delle x_2 nel punto di contatto dei due fili. Siano rispettivamente k_1, h_1, c_1, ϱ_1, ω_1, σ_1 e k_2, h_2, c_2, ϱ_2, ω_2, σ_2 i coefficienti delle con-